

Alain Badiou

SAYI VE SAYILAR



Çeviren: A. Nüvit Bingöl

 inka



Sayı ve Sayılar
Alain Badiou

Orijinal Adı | *Le Nombre et les nombres*

İnka Kitap | 17 | Edebiyatdışı
Çeviren | A. Nüvit Bingöl
Yayına Hazırlayan | Beki Nil Levi
Kapak ve Sayfa Düzeni | İnka Kitap

1. Baskı | Şubat 2024 (1250 adet)

ISBN | 978-605-70664-7-3

Copyright © Éditions du Seuil, 1990

Türkçe Yayın Hakkı © İnka Kitap, 2020

Türkçe Çeviri Hakkı © A. Nüvit Bingöl, 2019

“Ce livre a été publié avec l’aide du Ministère de la Culture-Centre National du Livre.”

“Bu kitap Fransız Kültür Bakanlığı-Centre National du Livre’in desteğiyle yayımlanmıştır.”

INKA KİTAP
Osmanağa Mah. Halil Ethem Sok.
Yeğiner İş Merkezi A Blok No:32/28 Kadıköy/İstanbul
Tel: 0216 337 00 09
Yayıncı Sertifika No: 44966
inkakitap@gmail.com

Baskı ve Cilt | Vizyon Basımevi
Matbaa Sertifika No: 52098

Bu kitabın bütün hakları saklıdır. Yayıncının yazılı izni olmaksızın kısmen ya da tamamen ve hiçbir yolla çoğaltılamaz.

ALAIN BADIOU

Sayı ve Sayılar

İçindekiler

Giriş.....	7
0. Sayı düşünölmelidir.....	9
1 Şecerele: Frege, Dedekind, Peano, Cantor.....	15
1. Yunan sayısı ve modern sayı.....	17
2. Frege	30
3. Frege'nin çağdaş bir kullanımı üzerine ek not	43
4. Dedekind	54
5. Peano	78
6. Cantor: "iyi sıralılık" ve ordınaller	88
2 Kavramlar: Doğal Çokluklar	99
7. Geçişli çokluklar.....	101
8. Von Neumann Ordınalleri.....	110
9. Ardışıklık ve limit. Sonsuz.....	120
10. Yineleme veya tümevarım.....	135
11. Doğal tam sayılar	151

3	Sayının Ontolojisi: Tanım, Sıralılık, Kesim, Türler	159
	12. Sayı kavramı: Olaysal bir adlandırma	161
	<i>Ordinal kümeleri üzerine ek açıklama.....</i>	<i>180</i>
	13. Sayıların farkı ve sırası.....	184
	14. Alt-Sayı kavramı	207
	15. Kesim: Temel teorem.....	219
	16. Sayının yerinin sayılamaz büyüğü	245
4	İşlemsel Boyutlar	285
	17. Doğal bir ara	287
	18. Sayıların cebiri	309
	Sonuç.....	327
	19. Sonuç olarak: Sayıdan varlık-ötesine.....	329

Giriş

0. Sayı düşünölmelidir

- 0.1 Paradoks: Sayı despotizminin çağında yaşıyoruz; düşünce [*pensée*], sayılabilir çoklukların [*multiplicités*] yasaına boyun eğiyor, ama buna rağmen (bu eksiklik, bu başarısızlık tam da kavramdan yoksun bir itaatın karanlık yüzünden ibaret değilse) elimizde sayının ne olduğuna dair yeni, aktif hiçbir fikir [*idée*] yok. Bu konuda geçmişte devasa bir çaba ortaya konmuş olsa da, bunlar [20.] yüzyılın başından itibaren büyük oranda son bulmuştur: Dedekind, Frege, Cantor ve Peano'nun çabalarından bahsediyoruz. Sayının olgusal etkisine, kavrama dair bir sessizlik eşlik ediyor. Dedekind'in 1888 yılında yayımladığı *Was sind und was sollen die Zahlen*'deki¹ sorusu bugün nasıl anlaşılmalı? Sayılar neye yarar, biliyoruz: Tam anlamıyla bütün her şeye [*à tout*] yararlar, Bütün'e [*Tout*] norm sağlarlar. Gelgelelim ne olduklarını ya bilmiyoruz ya da 19. yüzyıl sonundaki büyük düşünürlerin –kuşkusuz sayının yetki sahasının kapsamını öngörerek– söylediklerini tekrarlıyoruz.
- 0.2 Sayının hükümlanlığından, buyruğun “Say!” olduğundan bugün kim kuşku duyabilir? Üstelik Dedekind'in

1 Sayılar nedir ve ne işe yararlar?—çn

bildiği gibi, yeniden formüle edildiğinde Yunanca yazılması gereken “ἀεί ὁ ἄνθρωπος ἀριθμητίζει²” düsturuyla aynı anlamda değildir bu: Çünkü Dedekind’in sözü, düşüncenin mathème’deki tekil koşulunu tayin ediyordu. Oysa sayının şu anki imparatorluğunda söz konusu olan düşünce değil, gerçekliklerdir.

- 0.3 Sayı öncelikle artık mutabakata dayalı [*consensuelles*] (düşünülebilir olanla alakalı her siyaset bu mutabakatta tükense bile) oy hakkı, kamuoyu yoklamaları, çoğunluk kisvesi altında siyasal kavrayışımızı yönetiyor. İster genel olsun ister yerel, ister oy verme kabiniyle ister meclisle ilgili olsun, ister belediye düzeyinde ister uluslararası düzeyde olsun her “siyasi” çağrı bir saymayla sonuca bağlanır. Her kanaat [*opinion*], o kanaate inananların hiç durmadan sayılmasıyla ölçülür (böyle bir sayım her inananı bir inançsıza dönüştürse bile). Değerli, önemli olan [*ce qui compte*] şey, sayılan [*compté*] şeydir. Buna mukabil, sayılabilen her şey [*faire nombre*³] değerli olmalıdır. “Siyaset bilimi”, sayıları

-
- 2 [*aei o anthropos arithmetizei* - “insan daima sayar”. Plutarkhos (*Convivialium disputationum*, liber 8,2) şöyle bildirir: “Platon, Tanrı’nın daima matematik kullandığını söylemiştir”. Kepler’in bu beyanı *Mysterium Cosmographicum*’da tekrarlayışını (önerdiği *coelestis machina*’nın tamamen Platonculuk karşısı niteliği dikkate alınır, ya ironik ya da taviz veren bir tekrardır), Gauss’un ifadede yaptığı değişiklik takip etmiştir: *o theos arithmetizei*, tanrı matematik kullanır, sayar veya hesaplar. Dedekind’in “Kopernik devrimi”, bunu bir kez daha dönüştürmekten ibarettir: *aei o anthropos arithmetizei* - “insan daima sayar”; böylelikle aritmetiğin müthiş gücünü vurgulayarak seküler bir formülle bu dönüşümü tamamlar.] İngilizce Baskıya Çevirmenin Notu
- 3 *Faire nombre*, aynı zamanda kalabalık olma, sayı olarak çok olma anlamına da gelir.—çn

alt sayılar halinde artır, sayı serilerini karşılaştırır; ye-gâne nesnesi *oylardaki kayma*, yani sayıların çizelgelere yerleştirilmesinde ortaya çıkan ve çoğunlukla küçük olan değişimlerdir. Siyasal “düşünce” sayısal bir tefsirdir [exégèse].

- 0.4 Sayı, neredeyse tüm “insan bilimleri”ne hâkimdir (her ne kadar bu gizli/rakamlı [*chiffre*] mazeret, burada “bilim” olarak adlandırılan şeyin aslında pragmatigi yönetmekle ilgili olan teknik bir aygıt olduğunu pek gizleyemese de). İstatistik bu disiplinlerin bütün alanlarını işgal etmiştir. Bilginin bürokratikleştirilmesi her şeyden önce sayısallaştırmanın bir ur gibi sonsuzca büyümesidir.

[20.] yüzyıl başında sosyoloji, müşterek bağlar [*liens communautaires*] figürünü, sayıya boyun eğdirme isteğinde isabetli, hatta gözüpekçe olan şeyi müjdelemişti. Galileo’nun harfi harfine yazma ve matematikleştirme işlemlerini toplum ve temsillere yaymak istiyordu. Fakat nihayetinde bu pratiğin anarşik gelişimine yenik düştü. Şimdi aşikâr olanı doğrulamak veya parlamenter fırsatları saptamak dışında bir işe yaramayan usandırıcı hesaplarla dolu.

Tarih, istatistik tekniğinden yoğun bir şekilde faydalandı ve genellikle –bilhassa akademik Marksizmin koruması altında– artsüremli bir sosyolojiye dönüştü. Antik Yunan ve Latin tarihçilerden beri kendisini bir düşünce disiplini olarak tayin eden tek şeyi kaybetti: siyasetin gerçeğine bilinçli bağlılığı. Sayıya, ekonomizme, sosyolojizme tepki safhalarından geçişi bile sadece

bunların tam zıddıyla sonuçlanır: biyografi, tarihselleştiren psikolojizm.

Bilimsel Öteki'sine (moleküler biyoloji) saf ve basit indirgenişi dışında tıbbın kendisi de karmaşık bir ampirik bilgiler yığını, körü körüne test edilen sayısal korelasyonlardan oluşan devasa bir şebekedir.

Bu sayılar ile –artık her ne ise– *diğer sayılar* arasında olanaklı bütün mütekabiliyetler doygunluğa varıncaya kadar *sayıya dönüştürülmüş* beşerin “bilimleri”dir bunlar.

- 0.5 Sayı kültürel temsilleri düzenler. Televizyon, reytingler, reklamlar var var olmasına; fakat bunlar meselenin en önemli kısmı değil. Kültürel olan bizzat özünde sırf sayıdan örülüdür. “Kültürel bir olgu” sayısal bir olgudur. Buna mukabil, bir sayı oluşturan şey kültürel olarak saptanabilir; bir sayı oluşturmayan şeyinse adı bile yoktur. Ancak sayıya dair bir *düşüncenin* olması kaydıyla sayıyla ilgili olan sanat, kültürel olarak telaffuz edilemez bir kelimedir.
- 0.6 Sayı elbette ekonomiyi yönetir; kuşkusuz Louis Althusser'in sayının üstünlüğünün “son kertede belirlenimi” olarak adlandıracığı olguyu ekonomide buluruz. Modern parlamenter toplumların –şayet varsa– ideolojisi hümanizm, Hukuk veya Özne değil, sayı, sayılabilir olan, sayılabilirliktir. Günümüzde her yurttaşın dış ticaret rakamlarını, döviz kurlarının esnekliğini, Péchiney⁴ hisselerinin gelişimini bilmesi beklenir. Bu sayılar, başka sayıların, hükümetle ilgili sayıların, oy-

4 Alüminyum sektöründe faaliyet gösteren bir Fransız firması.—yhn

ların ve anketlerin ele aldığı gerçeklik olarak sunulur. “Durum” olarak adlandırılan şey, ekonomik sayısallıkla kanaatin sayısallığının kesişmesidir. Fransa (veya herhangi bir başka devlet) ancak bir ithalat-ihracat şirketinin muhasebe defterinde temsil edilebilir. Bir ülkeye dair tek resim, bize söylenene göre ülkenin gücünü taşıyan ve ruh halini kaydedenlerce makul bulunacağı umulan girift sayılar yığnında yer alır.

- 0.7 Sayı ruhlarımızı şekillendirir [*informer*]. Var olmak, insanın *kendi payına düşeni en iyi şekilde* [*compte favorable*] değerlendirmesi değilse nedir? Amerika’da insanlar ne kadar kazandıklarını söyleyerek söze başlarlar; böyle bir özdeşleşmenin hiç olmazsa dürüstlük gibi bir erdemi vardır. Yaşlı ülkemizse daha düzenbazdır. Yine de her kişinin özdeşleştiği sayısal alanları uzun uzadıya araştırmak gerekmez. Ne bakımdan sayıldıklarını, kim veya ne tarafından sayıldıklarını dile getirmeden kimse kendisini birey olarak sunamaz. Ruhlarımız, içinde çözüldüğü rakamların soğuk şeffaflığını haizdir.
- 0.8 Marx: “bencil/egoist hesapların buzlu suları”. Hem de nasıl! Ö kadar ki, egoizmin Egosu bir sayısal şebekeden ibarettir; böylelikle “egoist hesaplar” da bir rakamın rakamıdır.
- 0.9 Gelgelelim bir sayının ne olduğunu bilmediğimize göre kim olduğumuzu da bilmiyoruz demektir.
- 0.10 Kendimizi Frege, Dedekind, Cantor veya Peano’yla kısıtlamak zorunlu mu? Sayıya dair düşüncede o zaman-

dan bu yana *hiçbir şey olmamış mıdır?* Elimizde sadece sayının toplumsal ve öznel hükümdarlığının enginliği mi vardır? Peki bu düşüncülerin masum suçu nedir? Sayıya dair fikirleri ne ölçüde bu anarşik hükümdarlığa delalet eder? Sayıyı veya genel sayısallığın geleceğini düşünmüşler midir? Düşünceyi sayının despotizmi aleyhine döndürmek, bundan Özneyi eksiltmek için *başka bir sayı fikri* gerekmez mi? Matematik tekel hakkına sahip olduğu sayının bir bütün olarak toplum-sallaştırılmasını geçmişte sadece sessizce mi izlemişti? İşte incelemek istediğim konular.

1

Şecereler

Frege, Dedekind, Peano, Cantor

1. Yunan sayısı ve modern sayı

1.1 Antik Yunan'da sayı üzerine düşünmüş olanlar sayıyı Bir'le ilişkilendiriyordu; Bir ise, Öklid'in *Elemanlar*'ında¹ görülebileceği üzere, bir sayı olarak düşünülmüyordu. Bir'in sayı-üstü varlığından türeyen şey, birimdir [unité]. Ve bir sayı, bir birimler derlemesi, bir toplama işlemidir. Bu kavrayışın altında Elealılardan Yeni-Platonculara kadar giden sorunsal yatar: Bir'den hareketle Çokluk'un ortaya çıkması [procession]. Sayı, bu ortaya çıkışın şemasıdır.

1.2 Sayıya dair Antik Yunan düşüncesinin modern çağda iflası üç temel nedenin sonucudur.

Birincisi, Sonsuz sorununun istilasısıdır; diferansiyel hesaplara birlikte, gerçekte limitini düşünebildiğimiz halde son terimini saptayamadığımız sayı dizileri kullandığımız andan itibaren kaçınılmaz olan bir sorun.

1 Örneğin Öklid'in *Elemanlar*'ındaki sayı tanımını ele alalım (7. Kitap, 2. tanım): "Ἀριθμός ἐστὶν τὸ ἐκ μονάδων συγχεῖμενον τλήθος". Şöyle tercüme edebiliriz: "Sayı, birimlerden oluşan çokluktur." Sayının tanımı birimin tanımına bağımlı olduğu için ikincildir. Gelgelelim 1. tanım, birimin tanımı ne söyler? "Μονάς ἐστὶν, ἥτις ἢν ἐλάχιστον τῶν ὄντων ἐν λεγεται." Yani: "Birim, her var olanın bir olduğunu ifade etmeye dayanak olan şeydir." Sayının matematiksel tanımının varsaydığı ontolojik altyapı hemen göze çarpar (bizatihi var olan [étant] hakkında Bir olduğu söylenebilir).

Bu tür dizilerin limiti nasıl olur da sırf bir birimler derlemesi kavramı aracılığıyla *sayı gibi* düşünülebilir? Bir dizi bir limite doğru gider, terimlerinin veya birimlerinin toplamı değildir. Kendisinin, Bir'den hareketle bir ortaya çıkış olarak düşünülmesine olanak vermez.

İkincisi, sayının bütün inşası, kendisi varlığın ötesinde olan Bir'in varlığına dayanıyorsa, kökten bir yıkım olmadan o *diğer* ilkeyi, sayının ontolojik durma noktasını, yani sıfır veya boşluğu işin içine katmak imkânsız hale gelir. Elbette Bir'in tanımlanamaz ve üst-aşkın [*architrascendant*] karakterinin sıfırla damgalanabilmesi mümkündür; ayrıca yeni-Platoncu spekülasyon bunun için çalışır. Ama öyleyse sorun sayısal bire havale edilir: Dayandığı Bir boşsa, birim nasıl *sayılmalıdır*? Öyle karmaşık bir sorundur ki bu, göreceğimiz gibi, günümüzde sayıya dair modern bir düşüncenin anahtarı olmaya devam eder.

Üçüncü ve daha çağdaş bir neden, Bir'in varlığı fikrinin açıkça yerinden edilmesidir. Varlığın [*l'être*] esasen çokluk olduğunu ileri sürmek *zorunda bırakan* bir dönemin yargı alanı içindeyiz. Sonuç olarak sayı, Bir'in aşkın varlığı varsayımından türetilemez.

- 1.3 Dolayısıyla sayıya dair modern düşünce kendisini, söz konusu varsayımdan eksiltilmiş bir matematik inşa etmekle yükümlü bulmuştur. Bu amaçla modern düşünce üç farklı yöntem izlemiştir:

Frege'nin ve sonra da Russel'in yöntemi (kısaca mantıkçı yaklaşım olarak adlandıracağız), sırf düşüncenin kendi yasalarıyla ilgili tefekkürden sayıyı "söküp alır". Bu perspektife göre sayı, tamamen esas ilkelerden (yok-

luğunda, genel anlamıyla düşüncenin imkânsız olacağı ilkeler) tündengelimle çıkarılabilen, *kavramın* evrensel bir özelliğidir.

Peano ve Hilbert'in yaklaşımı (bunu formalist yaklaşım diye adlandıralım) tekil aksiyomlardan hareketle sayı alanını işlemsel bir alan olarak kurar. Bu durumda sayı, düşüncenin yasaları bakımından hususi bir konum işgal etmez; Peano'nun aksiyomlarının bütünüyle maddesel bakışa sunulmuş şeffaf notasyonlar aracılığıyla tayin ettiği kurallı bir işlemler sistemidir. Sayısal göstergelerin uzamı tek başına matematiğin en "kökensel" uzamıdır (ondan önce sadece saf mantıksal hesaplamalar gelir). Burada sayı kavramının, sadece kullanımı çerçevesinde var olarak kavranması anlamında, bütünüyle matematikleştirildiği söylenebilir: Sayının özü hesaplamadır.

Dedekind ve Cantor'un, daha sonra Zermelo, von Neumann ve Gödel'in yöntemi (küme teorisi veya "Platoncu" yöntem diye adlandırabiliriz) sayıyı, kümelerin hiyerarşisinin özel bir durumu olarak belirler. Her türlü insanın mutlak ilk dayanak noktası boş kümedir ve tabir caizse "diğer uçta" hiçbir şey sonsuz sayıları incelemeye engel olmaz. Sayı kavramı böylelikle, büyük İdeaları küme teorisinin klasik aksiyomları olan bir saf çokluk ontolojisine havale edilir. Bu çerçevede "bir sayı olmak" *tikel bir yüklem*dir, özellikleri ayırt edilebilen bazı kümeleri (ordinaller veya kardinaller ya da sürekliliğin elemanları, vs.) öyle düşünme kararıdır. Sayının özü, kendi iç sıra düzenini ilgilendiren belirli özelliklerle donatılmış bir saf çokluk olmaktır. Hesaplamaya dahil edilmeden önce sayı *vardır* (işlemler önceden var

olan sayı kümeleri “üzerinde” tanımlanacaktır). Burada sayının ontolojikleştirilmesi söz konusudur.

1.4 Benim kendi yaklaşımım aşağıdaki gibi olacak:

a) İçsel tutarlılık nedeniyle mantıkçı perspektif bir kenara bırakılmalıdır: Düşüncenin, özellikle de felsefi düşüncenin gereksinimlerini karşılayamaz.

b) Aksiyomatik veya işlemsel tez, sayının ideolojik toplumsallaştırılmasına en “elverişli” olandır: Nihayetinde *teknik* olan bir önerme içinde, bizatihi sayıya dair bir düşünce meselesinin etrafından dolaşır.

c) Küme teorisinin tezi, en güçlü olanıdır. Yine de bu teoriden, şimdiye kadar hâkim olandan çok daha radikal sonuçlar çıkarmak gerekir. Elinizdeki kitap bu sonuçların izinden gitmeye çalışmaktadır.

1.5 Planıma gelince: Frege’nin, Dedekind’in, Peano’nun tezlerini incelemek. Küme teorisi kavrayışını benimsemek. Bu kavrayışı radikallemektir. Söz konusu radikalleştirme çerçevesinde, diğerlerinin yanı sıra alışıldık sayılarımızı *da* bulduğumuzu kanıtlamak (çok önemli bir husus): Tam sayılar, rasyonel sayılar, gerçek sayılar... bunların hepsi sıradan işlemsel manipülasyonların ötesinde, kendisi de yasaya uygun olarak saf çokluğun ontolojisine kaydolan sayıya dair *tek* bir kavramın alt türleri olarak düşünülür.

1.6 Beklenebileceği gibi, matematik bu revizyonu daha önce ortaya atmıştı; ama kendisinin ücra bir köşesinde, kendi düşüncesinin özüne kör bir şekilde. 1970’li yılların başında J. H. Conway tarafından icat edilmiş olan (bkz. *On numbers and Games*, 1976), sonra ilk olarak

D. E. Knuth'un (*Surreal Numbers*, 1974) ve daha sonra Harry Gonshor'un kanonik kitabında (*An Introduction to the Theory of Surreal Numbers*, 1986) ele aldığı sürreel sayılar teorisinden bahsediyorum. Burada ancak amacımıza dahil olduğu ölçüde teknik ayrıntılarla ilgileneceğiz: Yani, sayının statüsünü Varlık'a dair bir düşünce biçimi olarak tespit ederek sayıya dair, ister siyasal, sanatsal, ister bilimsel veya aşkla ilgili olsun daima sayı-ötesi olan bir olayın bizi çağırması ölçüsünde bizi özgürleştirebilecek bir düşünce oluşturmak. Sayının şanını Varlık'ın önemli ama ona münhasır olmayan şanıyla kısıtlamak ve böylelikle hakikate sadakat açısından bir olayın getirdiklerinin geçmişte ve asla sayılamayacağını göstermek.

- 1.7 Sayı hakkında çalışan hiçbir modern düşünür (bu ifadeyle, Bolzano ile Gödel arasında sayı fikrini felsefeyle mantık-matematiğin birleşme noktasına yerleştirmeye çalışmış kişileri anladığımı hatırlatayım) *birleşik* bir kavram sağlayamamıştır. Doğal tam sayılar, “göreceli” tam sayılar (pozitif ve negatif tam sayılar), rasyonel sayılar (“kesirli” sayılar), reel sayılar (doğrusal sürekliliği sayan sayılar) ve son olarak karmaşık ve dördey sayılar² [*quaternions*] için normalde “sayı” deriz. Ayrıca iyi sıralılık (ordinaller) ve sonsuz da dahil, herhangi bir çokluğun saf miktarlarını (kardinaler) tanımlamak için, daha doğrudan bir küme teorisel anlamda da sayıdan bahsederiz. Sayıya dair bir kavramın, tüm bu durumları ya da en azından aralarında en “klasik” olanlarını kapsaması beklenebilir; örneğin bir yanda, ayrık sayı-

2 Bir değil, üç karmaşık sayıdan oluşan ve sırabagımsızlık özelliği sergilemeyen sistemler.—çn

landırmanın aşikâr şeması olan doğal tam sayılar ve öte yanda, sürekliliğin şeması olan reel sayılar. Gelgelelim durum böyle değildir.

- 1.8 Antik Yunanlar açık bir şekilde sayı kavramını tam sayılara ayırmıştı; bu da, sadece doğal tam sayılar bir birimler toplamı olarak temsil edilebilir olduğu için sayının Bir'den hareketle oluşumu fikriyle uyumluydu. Sürekliliği ele almak için büyüklüklerin ilişkisi veya ölçüm gibi geometrik ölçü birimleri kullandılar. Dolayısıyla, Antik Yunanların mümkün iki nesne türü olarak gördüğü şeylerden biri veya diğeriyle –sayı (aritmetik) ve şekiller (geometri)– ilişkili olmasına göre, matematiğin ikiye bölünmesi bu güçlü kavrayışı boydan boya katediyordu. Bana göre bu bölünme, birliğini fiilî veya materyalist düşüncenin diyalektik olarak sağladığı iki yönelime gönderme yapmaktadır: Elemanlar oluşturmaya, bağlantılandırmaya, birleştirmeye çalışan cebirsel yönelim ile komşulukları, dolayları, yaklaşımları algılamaya çalışan ve kalkış noktası elemanların aidiyeti değil, içerme, parça, altküme olan topolojik yönelim.³ Böyle bir bölümlemenin temelleri hâlâ sağlamdır. Bizzat matematik disiplini içinde, Bourbaki'nin büyük bilimsel incelemesinin iki ayağı, küme teorisinin genel ontolojik çerçevesi oturtulduktan sonra, “cebirsal yapılar” ve “topolojik yapılar” şeklindedir. Bu düzenlemenin geçerliliği bütün diyalektik düşüncenin temelini oluşturur.

3 Cebirsel yönelim ile topolojik yönelim arasındaki, materyalist düşüncüyü teşkil eden diyalektik üzerine *Théorie du sujet* adlı kitabıma başvurabilirsiniz, Paris, Seuil, 1982, s. 231-249.

- 1.9 Her koşulda, 17. yüzyıldan itibaren biraz gelişmiş bir matematiksel kavramı *aritmetik/geometri karşılığının tek bir tarafına yerleştirmenin* artık mümkün olmadığı açıklık kazanmıştır. Bir fikrinin geçerliliğini yitirmesi, sonsuz ve sıfırdan oluşan üçlü güçlük, sayı fikrinin iki yana dağılmasına neden olur, geometrik olanla aritmetik olanın, topolojik olanla cebirsel olanın inceltilmiş diyalektiğinde onu parçalara ayırır. Kartezyen analitik geometri en başından beri bu ayrımın kökten yıkımını önerir ve bugün “sayı teorisi” olarak adlandırılan şey son yıllarda kelimenin aldığı en geniş anlamda “geometri”nin en karmaşık kaynaklarını gerektirir. Dolayısıyla modernler artık sayı kavramını, kökeni kurucu nitelikte (Bir fikri) olan ve sahası (aritmetik) önceden belirlenmiş bir nesne olarak düşünemezler. “Sayı” birçok anlama gelir. Fakat bu anlamlardan hangisi kavram oluşturur ve düşünceye bu ad altında tekil bir şeyin sunulmasına olanak verir?
- 1.10 Bahsettiğim düşünürlerde bu sorunun yanıtı tamamen muğlaktır ve hiçbir birlik taşımaz. Örneğin Dedekind meşru bir şekilde kesim nosyonunu kullanarak rasyonel sayılardan ikna edici şekilde reel sayıları “üreten” ilk kişi olarak görülebilir.⁴ Gelgelelim “Sayılar nedir?” sorusunu yönelttiğinde, kuşkusuz tikel bir durum olarak düşüncede tam sayıların statüsünü kurabilen, ama reel sayılara doğrudan uygulanabilir olmayan genel bir ordinaller teorisiyle yanıt verir. Öyleyse reel sayıları

4 Kesim konusu, kavramı ve tekniği açısından bu kitabın 15. bölümünde ele alınmaktadır.

“sayılar” olarak düşünmek hangi anlamda meşrudur? Aynı şekilde Frege *Die Grundlagen der Arithmetik* [Aritmetiğin Temelleri] kitabında önceki bütün tanımları (Antik Yunanların bir “birimler kümesi” olarak sayıya dair tanımını da) zekice eleştirir ve aslında kardinalleri küme teorisi anlamında –ileride değineceğim tartışmalı birkaç hususa dayanarak– kapsayan bir “kardinal sayı” kavramı ileri sürer; doğal tam sayılar bunun sonlu bir durumu olacaktır. Fakat sonuç olarak ordinalleri dışlar; keza rasyonel, reel veya karmaşık sayıları da. Frege’nin favori ifadelerinden birini kullanacak olursam, böyle sayılar Frege’nin sayı “kavramına uygun düşmez”ler. Son olarak, Peano’nun aksiyomatığının sadece ve sadece kurallı bir işlemsel alan olarak tam sayıları tanımladığı açıktır. Kuşkusuz özel (tamamen sıralı, Arşimedci özelliğe uyan ve tam) bir aksiyomatikle reel sayılar doğrudan tanımlanabilir. Fakat şayet “sayı”nın özüne ancak bu aksiyomatikleri oluşturan önermelerin kendi doğası üzerinden erişiliyorsa tam sayılar ile reel sayılar arasında (kavram söz konusu olduğunda) ortak hiçbir şey olmadığı açıktır; çünkü tam sayıların ve reel sayıların aksiyomatikleri karşılaştırıldığında bu önermeler tamamen farklıdır.

- 1.11 Bir’in noksanlığından kaynaklanan modern sınıma dayanan bir sayı kavramı ileri sürme gibi bir sorun karşısında, her şey sanki düşünürlerimiz bu kavramı sayının “tecessümlerinden” birine (ordinaller, kardinaller, tam sayılar, reel sayılar...) tahsis etmiş ve her bir koşulda “sayı” fikrinin ve kelimesinin kullanımını meşrulaştırmayı başaramamış gibi gelişir. Daha özel

olarak, ayrık sayma (tam sayılar), sürekli sayma (reel sayılar) ve “genel” sayma ya da küme teorisine göre sayma (ordinaller ve kardinaller) için birleşik bir ele alış biçimi önermeye muktedir olmadıkları ortaya çıkmıştır. Gelgelelim aritmetikle geometriye dair Antik Yunan’daki zıtlığı doygunluk noktasına ulaştırıp çökerterek modernleri sayı fikrini yeniden kurmak zorunda bırakan, tam da süreklilik sorunu veya ayrık/sürekli diyalektiğidir. Sadece bu bakış açısından hayran olunası çabaları, aslında bir başarısızlıktır.

1.12 Her bir vakada uygulanan yöntemler ne kadar birbirine benzemiyorsa böylelikle yaratılan anarşi de o kadar büyüktür (ayrıca düşüncedeki bu anarşinin, sayının düşünce içermeyen despotizmi konusunda tamamen masum olduğunu da düşünemiyorum):

a) Doğal tam sayılar ya merkezinde yineleme ilkesi (Peano) olan özel bir aksiyomatikle ya da bir ordinaller teorisinin (sonlu) özel bir vakası olarak (bu durumda yineleme ilkesi bir teoreme dönüşür - Dedekind) belirlenir.

b) Negatif sayıları üretmek için, sayının “varlık”ı hakkında değil, işlemsel mekanizmalar, yapılar (toplama işleminin simetrikleştirilmesi) hakkında olan cebirsel uygulamalar katmak gerekir.

c) Bu uygulamalar rasyonel sayıları elde etmek için tekrarlanabilir (çarpma işleminin simetrikleştirilmesi).

d) Sadece, bu kez topolojiye doğru yönelen, temel bir kopuş, reel sayılara geçişi kurabilir (rasyonel sayılar kümesinin sonsuz altkümelerinin, kesimlerin veya Cauchy dizilerinin dikkate alınması).

e) Karmaşık sayıları inşa etmek amacıyla cebire geri dönölür (reel sayıların cebirsel kapanışı veya “ideal” $i=\sqrt{-1}$ elemanın eklenmesi ya da reel sayı çiftleri üzerinde doğrudan işlemsel aksiyomlaştırma).

f) Ordinaller, sıra türlerinin (Cantor) hesaba katılmasıyla veya geçişlilik kavramının kullanılmasıyla (von Neumann) dahil edilir.

g) Kardinallerse bambaşka bir prosedürden gelir; birbir ve örten eşlemeler.⁵

1.13 Kökenleri Antik Yunan’a, Arap cebircilere, Rönesans İtalyası’nın hesap uzmanlarına ve modern analizin bütün kurucularına, modern cebirin “yapısalcıları”na ve Dedekind ve Cantor’un küme teorisi yaratımına uzanan bu prosedür cephaneliğinden –ister varlık türü ister işlemsel bir kavram olarak düşünelim– sayıya dair net ve tek anlamlı bir düşünce nasıl çıkarılabilir? Sayı üzerine düşünenler aslında her “sayı” türüne götüren düşünsel prosedürü belirtmek dışında bir şey yapamamış, sayıyı adının gölgesinde bırakmışlardır. Mallarmé’nin yıldız gibi yükselişini örgütlediği o “bir başkası olamayan biricik sayı”dan⁶ uzak kalmışlardır.

1.14 Dolayısıyla soru şudur: Üniform bir prosedüre başvurarak eşsiz bir varlık türünde en azından sonlu veya sonsuz doğal tam sayıları, rasyonel sayıları, reel sayıları ve ordinal sayıları kapsayabilen bir sayı kavramı var

5 Modern analizin kullandığı farklı sayı türlerine dair hızlı bir giriş için bkz. örneğin, J. Dieudonné, *Éléments d’analyse*, c. 1, *Fondements de l’analyse moderne*, Paris, Gauthier-Villars, 3. baskı, 1981, bölüm 1-4.

6 Mallarmé’nin *Un coup de dés jamais n’abolira le hasard* (Bir Zar Atımı Asla Ortadan Kaldırmayacak Rastlantıyı) adlı şiirinden.—çn

mıdır? Ait olduğu ve herhangi bir başkasına indirgenemez olan tekil sistemi belirtmeye gerek kalmadan bir sayıdan bahsetmenin anlamı var mıdır? Yanıt olumludur. “Sürreel sayılar”ın marjinal –ve felsefi bakımdan merkezî kılmak istediğim– teorisinin bize sunduğu tam budur.

Söz konusu teori, bize hakiki çağdaş sayı kavramını verir ve böylelikle modern-klasik biçiminde sayı düşüncesinin, Dedekind, Frege ve Cantor’un düşüncesi- nin çıkmazını aydınlatır. Bu teoriden hareketle, uzun bir düşünce çalışması sonucunda, nümerik düşünül- meyenin (*impensé*) kör despotizmine galip gelebiliriz.

- 1.15 Sayıya dair tek bir modern düşünce çağından değil, Natacha Michel’in edebiyata uyguladığı bir ifadeyi alarak, sayıya dair düşüncede “ilk modernite” olarak adlandırılabilir şeyden söz etmek gerekir⁷. Bu ilk moderniteye ait kişilerin adları Proust ve Joyce değil, Bolzano, Frege, Cantor, Dedekind, Peano’dur. Bense ikinci bir moderniteye geçiş denemesi yapıyorum.
- 1.16 Sayıya dair modern bir doktrinin karşı karşıya kaldığı üç güçlüğün, Bir’in herhangi bir temel sağlayamaması, sonsuz ve sıfır olduğunu söylemiştim. Birçok noktada birbirlerine çok yakın olan Frege ile Dedekind karşılaştırılacak olursa, söz konusu güçlülere buldukları yanıtların sırasının temelde farklı olduğu hemen fark edilir:

7 Natacha Michel, “ilk modernite” ile “ikinci modernite” arasında bir ayrım yapılması gerektiğini ileri sürer, *L’Instant persuasif du roman*, Paris, 1987 (Les Conférences du Perroquet).

Sonsuz üzerine. Dedekind insanı hayran bırakan bir derinlikle, meşhur bir pozitif özelliklerle belirlediği *sonsuzla başlar*: “Bir S sistemi, kendi parçalarından birine benzer olduğunda sonsuz olarak adlandırılır.” Hemen sonsuz bir sistemin var olduğunu “ispatlama”ya girer. Sonlu daha sonra belirlenecektir ve sonsuzun olumsuzlanması yoluyla elde edilir (bu bakımdan Dedekind’in sayısal diyalektiğinin Hegelci bir yanı vardır⁸). Buna mukabil Frege sonluyla, doğal tam sayılarla başlar; sonsuzsa sonlunun “uzantısı” veya kavram içinde bir araya getirilmesi olacaktır.

Sıfır üzerine. Dedekind boşluk ve boşluğun işaretini sevmez ve bunu açık açık söyler: “Bazı nedenlerden dolayı, hiçbir eleman içermeyen boş sistemi tamamen bir kenara bırakıyoruz.” Frege’ye tersine “sıfır bir sayıdır” ifadesini yapıtının sarsılmaz temeli yapar.

Bir üzerine. Frege’de Bir’in herhangi bir imtiyazına dair bir emare yoktur (çünkü tam da büyük bir cesaretle sıfırla başlamıştır). Büyük harfle yazılan Bir’den ziyade bir, “sıfırla özdeş” kavramına giren sayı olarak tali konumdadır (aslında bu kavrama uyan tek nesne bizzat sıfır olduğu için söz konusu kavramın kaplamının [extension] bir olduğunu söyleme gerekçemiz vardır). Dedekind’deyse bir’le “başlanacağı” fikri korunur: “1 taban elemanına, N sayı serisinin taban sayısı denir.” Buna bağlı olarak Dedekind düşüncenin mutlak bir Bütün’ü fikrine başvurmaktan çekinmez; Frege’nin

8 Meziyeti sonsuzun, sonlunun saf sunumunun/mevcudiyetinin [présence] hakikati olması olan Hegelci sayı kavramını L’Être et l’Événement’in 15. meditasyonunda ayrıntılı olarak yorumluyorum, Paris, Seuil, 1988, s. 181-190.

formalizminde bu haliyle beliremeyecek bir fikir: “Düşüncelerimin alanı, yani düşüncemin nesneleri olabilen bütün şeylerin S kümesi sonsuzdur.” Bir’in hakları takip edildiğinde Bütün varsayılır, zira Bütün zorunlu olarak, Bir var olduğu andan itibaren, *Bir’in sonucudur*.

- 1.17 Bu sıra farklılıkları teknik bir mesele değildir. Her bir düşünürde sayıya dair kavrayışın ağırlık merkezi olan şeyden ve ileride göreceğimiz gibi düşüncelerinin durma noktası ve aynı zamanda temelinden kaynaklanır: Dedekind’de sonsuz ve varoluş, Frege’de sıfır ve kavram.
- 1.18 Sayıya dair düşüncede ikinci bir moderniteye geçiş, düşünceyi sıfır, sonsuz ve Bir’e geri dönmek zorunda bırakır. Bir’in mutlak yitimi, boşluğun varlığına ve bu varlığı işaretleyen şeye dair ontolojik karar, sonsuzların ölçüsüz çoğalışı: Böyle bir geçişin parametreleri işte bunlardır. Bir’den kurtulmuş olmak bizi boşluğun eşsizliğine ve sonsuzun saçılmasına götürür.

2. Frege

2.1 Frege sayıyı saf düşüncenin doğurduğunu ileri sürer. Mallarmé gibi Frege de –gerçi Şans faktörü devreye girmeden– “her düşünce atılan bir el zardır” diye düşünür. Frege’nin “mantıkçılığı” olarak adlandırılan şey çok derinlere uzanır: Sayı varlığın tekil bir biçimi veya şeylerin tikel bir özelliği değildir. Ne ampiriktir ne de aşkın. Ayrıca kurucu bir kategori de değildir: Kavramdan tümdengelimle çıkarsanır, Frege’nin ifadesiyle *kavramın bir niteliğidir*.⁹

2.2 Saf kavramdan sayıya geçmeye olanak veren merkezî özellik, kavramın *kaplam* özelliğidir. Bu ne anlama gelir? Herhangi bir kavram verildiğinde, bir nesne şayet söz konusu kavramın bir “doğruluk hali” ise, yani kavramda içerilen özelliği bu nesneye isnat eden önerme doğru bir önermese ya da nesne kavramı tasdik ediyorsa, nesne bu kavramın çatısı altında “toplanır”. Fark edileceği üzere her şey önermelerin doğruluk de-

9 Frege’nin sayıya dair kavrayışı için başvuru metni: G. Frege, *Les Fondements de l’arithmétique*, çev. C. Imbert, Paris, Seuil, 1969. Almanca ilk baskı tarihi 1884. Bir hayli yoğun olan ana argüman 55-86. paragraflar arasındadır (andığım baskıda 30 sayfanın altında).

Claude Imbert’in çalışmasının mükemmelliğini, özellikle de uzun giriş yazısını saygıyla selamlamak gerekir.

gerinden kaynaklanır; önermelerin anlamı doğruluk değerleridir (doğru veya yanlış). Kavram sayıyı doğuruyorsa, bunun ancak doğru¹⁰ diye bir şey varsa mümkün olduğu ileri sürülebilir. Bu anlamda sayı doğrunun endeksidir; varlığın endeksi değil.

Fakat kaplam fikri dallı budaklıdır, karanlıktır.

- 2.3 Bir kavramı ele alalım; söz konusu kavramın çatısı altında toplanan bütün doğruluk hallerini (*doğruluk hali olarak* bütün nesneler) bu kavramın kaplamı olarak adlandıracamız. Her kavramın bir kaplamı vardır.

Şimdi iki kavramı, C_1 ve C_2 'yi düşünelim. C_1 kavramının çatısı altında toplanan her bir nesneyle C_2 kavramının çatısı altında toplanan her bir nesneyi ilişkilendiren birebir ve örten bir eşleme varsa, yani C_1 'in kaplamı ile C_2 'nin kaplamı arasında birebir ve örten bir eşleme tanımlanabiliyorsa, bu kavramlar eşsayılı [*équivalente*] olarak adlandırılacaktır.

Frege'nin sayıya dair “kardinal” bir tanıma doğru gittiği, kavramın çatısı altında toplanan şeylerin sıra yapısıyla ilgilenmediği açıkça görülüyor. Birebir ve örten olan bu temel araç aslında kendinde çokluğu, herhangi bir yapısal düşünceden eksiltilmiş saf çokluğu “sayma” çabalarının tümünün bir karakteristiğidir. İki kavramın eşsayılı olduğunu söylemek, “aynı miktar” a sahip olduklarını, kaplamalarının aynı boyda olduğunu söylemekle aynı şeydir; bu kavramların çatısı altında toplanan nesnelerin ne *olduğuna* dair düşünceden soyutlanılmıştır.

10 Kitap boyunca *vérité* kelimesine mantık veya matematik söz konusu olduğunda “doğruluk”, felsefe ve özellikle de Badiou'nun felsefesi söz konusu olduğunda “hakikat” karşılığını verdik.—çn

2.4 Sayı, eşsayılılığı, kavramların niceliksel özdeşliğini *işaretlemekten* ibarettir. Şu meşhur tanım da buradan gelir: “C kavramına ait olan sayı, ‘C kavramıyla eşsayılı’ kavramının kaplamıdır.” Şöyle tercüme edilebilir: Her C kavramı bir sayı, yani C’yle eşsayılı olan, “aynı saf niceliğe”, C’yle aynı kaplam niceliğine sahip olan kavramlar kümesini doğurur. Varlığında kavranan sayının mutlaka bir *kavramlar kümesine*, ya da “C’yle eşsayılı bir kavram olmak” önermesini doğrulayan her şeye *işaret ettiğine* dikkat çekelim.

2.5 Sayı kavramının inşa edilme zinciri aşağıdaki gibidir: Kavram → Doğruluk → Kavramın çatısı altında toplanan nesneler (kavramı nesneye atfetme önermesini doğrulayan nesneler) → Kavramın kaplamı (kavramın bütün doğruluk halleri) → İki kavram arasında eşsayılılık (kaplamlarının birebir ve örten eşlemesiyle) → Bir C kavramıyla eşsayılı olma kavramının çatısı altında toplanan kavramlar (“C’yle eşsayılı olma” önermesini doğrulayan kavramlar) → C’yle eşsayılı olmanın kaplamı (önceki adımdaki kavramların kümesi) → C kavramına ait olan sayı (dolayısıyla sayı, C’yle eşsayılılığın kaplamının adıdır).

Basitleştirilmiş ve işlemsel bir bakış açısından, kavramdan hareket edildiği, doğruluk koşuluyla nesneye geçildiği, kavramların karşılaştırıldığı ve sayının bu karşılaştırmaların olanaklı ve tanımlı bir özelliğini (eşsayılılığı) ortak olarak taşıyan kavramların kümesini adlandırdığı da söylenebilir.

2.6 Yalnızca doğruluğun bir norm sağladığı bu saf kavramsallaştırmadan hareketle “sıradan”, tanıdık sayıları

bulmak amacıyla Frege hayranlık uyandırıcı bir şekilde sıfırı tümdengelimle türetmeye koyulur: Sıfır, “kendisiyle özdeş olmama” kavramına ait olan sayıdır. Her nesne kendisiyle özdeş olduğu için “kendisiyle özdeş olmama” kavramının kaplamı boştur. Dolayısıyla sıfır, kaplamı boş olan kavramların kümesidir ve bu nedenle “kendisiyle özdeş olmama” kavramıyla eşsayılıdır. Bu da tam olarak, kaplamı boş olan *her* kavrama ait olan sayının sıfır olduğu anlamına gelir.

1.16’da 1 sayısına geçişe işaret etmiştim: “Bir”, “sıfırla özdeş” kavramına ait olan sayıdır. Frege’nin 1’in hiçbir “sezgisel” veya ampirik imtiyazı olmadığını, ayrıca aşkın bir temel de olmadığını vurguladığına işaret etmemiz gerekir: “1’in tanımı hiçbir gözleme tabi olmayan nesnel bir meşruluğa sahiptir.” Frege kuşkusuz Bir’in modern ihracı sürecine katılır.

1’in dışındaki sayı dizisinin üretimi sadece teknik bir meseledir; n ’den $n+1$ ’e geçtiğimizde ilgili kavramların kaplamları arasında, “kalan” tam olarak 1 olacak şekilde bir korelasyon inşa edilerek bu sorunlar üzülür. Nihayetinde 1 halihazırda tanımlanmıştır.

- 2.7 Böylelikle kavramın sonucu olarak sayının tümdengelimle çıkarsanması tamamlanmış gibidir. Daha kesin bir şekilde söylersek: Kavram/doğruluk/nesne üçlüsünden ve birebir ve örten eşleme denen o biricik formal işlemciden sayı, saf düşüncenin bir durumu veya bütünüyle mantıksal bir üretim olarak ortaya çıkar: Düşüncenin, doğruluk hallerine sahip olmaya *elverişli* (dolayısıyla bir kaplama sahip) bir kavram biçiminde kendisini var sayması *gerekir*. Böyle yaptığında düşünce, sayıyı varsaymış olur.

2.8 Sıfırı temellendirmek için neden özellikle “kendisiyle özdeş olmama” kavramı seçilmiştir? Sonuçta kaplamının boş olduğu bilinen her kavram seçilebilirdi: Söz konusu kavramın belirttiği özelliğe sahip olabilecek hiçbir nesnenin düşünülmediği her kavram. Örneğin, Frege’nin “hakkında söylenen fena şeyleri hak etmediği”ni beyan ettiği bir kavram olan “kare daire”. Sayının tamamen kavramsal belirlenimi söz konusu olduğu için, kavramın seçilmesindeki keyfilik bir parça rahatsız edicidir. Frege de bunun farkındadır, zira şöyle yazar: “0’ı tanımlamak için, çatısı altında hiçbir şey toplanmayan herhangi bir kavramı alabilirdim.” Kendisine yönelttiği itirazdan kaçınmak için Leibniz’i anar: Her nesnenin kendisiyle özdeş olduğunu ileri süren özdeşlik ilkesinin “tamamen mantıksal” olmak gibi bir meziyeti vardır. Tamamen mantıksal mı? Fakat mantıksal-matematiksel kategorileri (özellikle sayıyı) sırf saf düşüncenin yasalarından hareketle meşrulaştırmanın söz konusu olduğunu sanmıştık. En baştan mantıksal bir kural gerekiyorsa döngüsellik riski yok mudur? Bu durumda “kendisiyle özdeş” önermesinin “kendisine eşit” önermesiyle karıştırılmaması gerektiği söylenecektir. Elbette eşitlik (ve özel olarak sayılar arasındaki eşitlik) temellendirilmesi gereken mantıksal veya işlemsel yüklemelerden biridir. Fakat şayet “özdeşlik”in burada mantıksal eşitlik yükleminden dikkatle ayırt edilmesi gerekiyorsa “her nesne kendisiyle özdeş tir” önermesinin “tamamen mantıksal” [*logique*] bir önerme olmadığı açıktır. *Bu bir onto-lojik [onto-logique] önermedir.* Ve ontolojik bir önerme olarak hemen tartışmalı hale gelir: Örneğin, hiçbir Hegelci, özdeşlik il-

kesinin evrensel geçerliliğini kabul etmeyecektir. Fara-zi Hegelçimiz için “kendisiyle özdeş olmama” kavramının kaplamı, boş olmak dışında her şeydir!

2.9 Kaplamanın boş olduğu kesin olacak bir kavramın tamamen *a priori* şekilde belirlenmesi, güçlü ön ontolojik aksiyomlar olmadan imkânsız bir görevdir. Frege’nin içine düştüğü çıkmaz, *nesneye dair* denetlenmemiş bir doktrinin çıkmazıdır. Zira saf kavramla ilişkili olarak genel anlamda bir “nesne”, nesnelerin toplam Evrenin- den alınmış herhangi bir nesne nedir? Frege’nin diğer- leri gibi olağan kavramlar olduğunu vurguladığı “kare daire” türündeki kavramlara dair olumlu düşüncesiyle işaret ettiği gibi, kavramın meşru olması için çelişme- mesi zorunluluğu bile yokken neden nesnenin kendi- siyle özdeş olması zorunlu olsun? Nesnelerin varlığı- na dair yasa neden kavramların varlığına dair yasadın daha katı olsun. Elbette, var olan nesnelerin düşünüle- bilir nesnelerden *farklı bir ilkeye*, yeter neden ilkesine uyduğunu düşünen *Leibniz’in ontolojisi kabul edilecek olursa* öyledir. Öyleyse sayının kavramdan hareketle tündengelimle çıkarsanması evrensel veya “tamamen mantıksal” olmaktan ziyade Leibnizcidir.

2.10 Bir kavramın kaplamanın şu veya bu olduğunu (ör- neğin, “kendisiyle özdeş olmama” kavramının kapla- mının boş olduğunu) aşikâr [*evident*] bir şey olarak ileri sürmek, kavramdan varoluşa sorunsuz bir şekil- de geçebileceğimizi varsaymaya denktir; çünkü bir kavramın kaplamı, söz konusu kavramın çatısı altın- da toplanan “nesneler”i devreye sokar. Burada bir tür

genelleştirilmiş bir ontolojik argüman vardır ve sırf kavramdan hareketle sayının tündengelimle çıkarsanmasını sağlayan tam da bu argümandır: Sayı, *kavramın çatısı altında toplanan düşünülebilir nesnelerin dolayısıyla kavrama aittir*.

- 2.11 1903 yılında Frege'ye iletilen Russel paradoksunun asli düşüncesi, sadece kavramdan hareketle varoluş ve özellikle de kavramların kaplamının varoluşu hakkında yasa yapma iddiasını çürütmektir. Russel (Frege'nin verdiği anlamda) bir kavram sunar: "kendisinin elemanı olmayan bir küme olma" kavramı. Kesinlikle uygun bir kavramdır bu (doğruyu söylemek gerekirse "kendisiyle özdeş olmama"ya göre çok daha uygun bir kavram), gelgelelim *bir kaplamı yoktur*. "Nesneler"in, Russel'in önermesinde "bu kavram çatısı altında toplanan" kümelerin kendilerinin bir küme oluşturması çelişkilidir.¹¹ Bir küme oluşturmuyorlarsa bunlar için, ne tür olursa olsun, birebir ve örten bir eşleme tanımlanamaz. Dolayısıyla bu "kaplam" eşsayılılığı desteklemez ve sonuç olarak *hiçbir sayı* "kendisinin elemanı olmayan küme" kavramına ait olmaz.

Kavramın karşısına bir sayılamaz çıkması Frege'nin genel tündengelimini mahveder. Söz konusu paradoksal kavramın tamamen sıradan olduğu (fiiliyatta mate-

11 Russel'in Frege'ye, adını taşıyan paradoksu anlattığı ve Almanca yazılmış olan mektup J. van Heijenoort tarafından yayına hazırlanan *From Frege to Gödel* adlı metin derlemesinde İngilizce çevirisiyle yer almaktadır, Cambridge, Harvard University Press, 4. baskı, 1981, s. 124. Russel "küme" ile "toplam" arasında biçimsel olmayan bir ayrımla mektubu sonlandırır: "Buna [paradoksa] dayanarak bazı koşullarda tanımlanabilir bir kümenin bir toplam oluşturmadığı sonucuna varıyorum."

matikçilerin kullandığı tüm kümeler bu kavramı doğrular: bunlar kendilerinin elemanı değildirler) dikkate alındığında hiçbir sayının ait olmadığı başka kavramların da var olduğundan kuşku duymak mümkündür. Aslına bakılırsa, felaketin boyutlarını *a priori* öngörmek imkânsızdır. “Kendisiyle özdeş olmama” kavramının bile var olan hiçbir kaplamı olmadığı ortaya çıkabilir ve bu, boş bir kaplama sahip olmaktan tamamen farklı bir şeydir. Russel’ın paradoksunun tamamen mantıksal olduğunu, yani kesin olarak ispatlandığını da ekleyelim: Kendilerinin elemanı olmayan tüm kümelerin bir kümesinin var olduğunu kabul etmek *formel* bir çelişki (bir önerme ile o önermenin olumsuzlanmasının denkliği) sokarak tümdengelimci dili bozar.

- 2.12 Zermelo tarafından bu soruna bir tür yama önerilmişti.¹² Buna göre, *daha önceden verili bir varoluştaki işlem yapmak koşuluyla* kavramdan bu kavramın kaplamasının varoluşuna varmak mümkündür. Bir *C* kavramı ve *var olan bir nesneler alanı* verildiğinde, söz konusu kavramın çatısı altında toplanan nesneler kümesinin, dolayısıyla kavramın kaplamasının *bu var olan alan içinde* var olduğunu söyleyebilirsiniz. Elbette bu kaplam, önceden belirtilmiş bir nesneler alanıyla ilgilidir, “kendinde” var olmaz. Bu ise büyük bir ontolojik değişikliktir:

12 Zermelo, Russel paradoksuna çözüm getiren ayırma aksiyomu da dahil küme teorisi aksiyomatığını Almanca yazılmış 1908 tarihli bir metinde geliştirir. Bu metnin İngilizce çevirisi bir önceki notta anılan van Heijenoort’un derlemesinde bulunabilir. *Investigations in the Foundations of Set Theory* ve özellikle birinci bölümü “Fundamental Definitions and Axioms”, s. 201-206.

Bu yeni çerçevede kavramdan varoluşa (dolayısıyla sayıya) varmak imkânsızdır ve ancak önceden verili bir varoluştan bir şekilde kesilip alınmış bir varoluşa varılabilir. Verili bir alanda, bu alandaki kavramın sergilediği özelliği doğrulayan nesneleri “ayırabilirsiniz”. Kavramın ve dilin varoluş üzerindeki haklarını büyük oranda kısıtlayan Zermelo’nun ilkesinin ayırma aksiyomu olarak adlandırılmasının nedeni budur. Söz konusu aksiyomun kabul edilmesi koşuluyla, Russel’in sunduğu türden paradoksların tutarsızlık etkilerine karşı korunuruz.

2.13 Russel paradoksu hiçbir şekilde paradoksal değildir. Materyalist bir argümandır, zira çoklu-varlığın, kendisini etkileyen önermelerden önce geldiğini *kanıtlar*. “Paradoks”, dil ve kavrama varoluş hakkında sınırsızca yasa koyma hakkını isnat etmenin imkânsız olduğunu söyler. Dilin aşkınsal bir fonksiyonunun olduğu kabul edildiğinde bile, bir var olanın [existant] ilksel olarak elde hazır bulunduğunu varsayar ve söz konusu fonksiyonun gücü, belirtilen var olan içinde kavramın kaplamalarını kesip ayırmak veya sınırlamaktan ibarettir.

2.14 Zermelo’nun aksiyomu kabul edildiğinde Frege’nin sayı inşası kurtarılabilir mi? Her şey yine sıfır meselesinde düğümlenir. Şu şekilde ilerleyeceğim: Varoluşu dışarıdan garanti edilmiş, kısıtlı bir nesneler alanı verildiğinde, “kendisiyle özdeş olmama” kavramının veya bu alandaki hiçbir nesnenin çatısı altında toplanmadığından emin olabileceğim herhangi bir başka kavramın bu alanda kesip aldığı veya ayırdığı şeyi “sıfır” (ya da

aynı anlama gelen, boş küme) olarak adlandıracağım. Frege'nin inşasında olduğu gibi "bütün nesneler" değil (bu, kriterden yoksun bir Leibnizci seçim çıkmazına sürüklüyordu), kısıtlı bir alan söz konusu olduğu için böyle bir kavram bulma olasılığım vardır. Örneğin, siyah nesnelerden oluşan bir küme alırsam, bu kümede "beyaz olma" kavramını ayıran şeyi "sıfır" olarak adlandıracağım. İnsanın geri kalanı peşi sıra gelecektir.

2.15 Fakat hangi nesneler alanından başlamalıyım ki, bunların saf düşünce alanına ait olmaları, "tamamen mantıksal" olmaları garanti olsun? Frege kendi deyimiyle "ne duyulur bir varlık ne de haricî şeylerin bir özelliği" olan bir sayı kavramı inşa etmeyi amaçlar ve defalarca sayının temsil edilebilir olandan eksiltildiğini vurgular. Sayının düşüncenin bir üretimi olduğunu ortaya koymak, sayıyı sadece genel olarak kavramın soyut yüklemelerinden çıkarmak, beyaz veya siyah nesnelerle yetinemez. Dolayısıyla soru şuna dönüşür: Her türlü deneyim dışında hangi var olan bana teminat verebilir? "Bir şey vardır" aksiyomu saf düşüncenin bir aksiyomu mudur ve öyle olduğu varsayıldığında, bu var olan "bir şey"e hiçbir şekilde ait olmadığı kesin olan hangi özelliği ayırt edebilirim?

2.16 Düşünce için, herhangi bir nesnenin, bir varlık noktasının, bir "nesne= x "'in varoluşunun "tamamen mantıksal" ispatı: "Her x kendisine eşittir" önermesi mantığın eşitlikle ilgili bir aksiyomudur. Birinci derece mantığın, her nesne alanı için geçerli olan mantığın evrensel kuralları "her x , x 'e eşittir" önermesinden " x 'e eşit bir x

vardır” önermesini çıkarmamıza olanak verir (varoluşsal niceleyicinin evrensel niceleyiciye tabiliği).¹³ Dolayısıyla x vardır (en azından kendisine eşit olan o x vardır).

Böylelikle bir küme teorisi çerçevesinde önce tamamen mantıksal araçlarla bir kümenin var olduğunu gösterebiliriz. Daha sonra var olduğunu kanıtladığımız o var olan içinde, hiçbir elemanın doğrulayamayacağı bir özellik kullanarak (örneğin, “kendisine eşit olma”) boş kümeyi ayırabiliriz. Önceden verilmiş olan bir var olanda işlem yaptığımız için Zermelo’nun aksiyomuna uyulmuş ve sıfır üretilmiştir.

- 2.17 Bu “ispat”ın kimseyi ikna etmeyecek bir hile, mantıksal bir el çabukluğu olduğu bence gayet açık. Kendisine eşit olmanın evrensel olarak ileri sürülmesinden hareketle (sonuçta bu soyut yasa ya da kavramın yasası olarak kabul edilebilir) kim hiçbir şeyden ziyade bir şeyin var olduğu sonucuna akla uygun bir şekilde varabilir? Şayet Evren tamamen boş olsaydı, bir şeyin var olduğu varsayıldığında (durum öyle olmasa da), kendisine eşit olmak zorunda olduğu mantıksal olarak kabul edilebilir olurdu. Böyle bir evrende “her x , x ’e eşittir” önermesi geçerli olsa bile hiçbir x olmayacaktı; dolayısıyla “kendisine eşit bir x vardır” önermesi geçerli olmayacaktı.

13 Varoluşsal niceleyicinin evrensel niceleyiciye tabi olması, bir P özelliği verildiğinde her x bu özelliği taşıyorsa bu özelliği taşıyan bir x ’in var olduğu anlamına gelir. Ya da yüklem hesabında $\forall x(P(x) \rightarrow \exists x(P(x)))$. Yüklem hesabının klasik kuralları ve aksiyomları bu çıkarımı yapmaya olanak verir. Bkz. örneğin E. Mendelson, Introduction to Mathematical Logic, D. Van Nostrand Company, 1964, s. 70-71.

Evrensel bir önermeden bir varoluş savına geçiş, kavramın kendine mal edemeyeceği haddini aşan bir haktır. Mutlak hiçlikte de gayet geçerli olabilecek bir evrensel yasadan hareketle varoluşu ortaya çıkarmak mümkün değildir (örneğin “hiçlik kendisiyle özdeştir” önermesini düşünün). Saf düşünceden hiçbir var olan nesne çıkarsanamayacağı için bu düşüncede sıfırı ayıramazsınız. Zermelo, Frege’yi kurtarmaz.

2.18 Sıfırın veya boş kümenin varoluşu ve dolayısıyla sayıların varoluşu hiçbir şekilde kavram veya dilden çıkarılamaz. “Sıfır vardır” kaçınılmaz olarak bir *ilk* savdır: diğerlerinin türeyeceği bir varoluşu sabitleyen sav. Frege’nin mantıkçılığıyla bir araya gelmiş Zermelo’nun aksiyomunun, sıfırı, sonra da sayı zincirini oluşturmamıza izin vermesi bir yana, ne olursa olsun herhangi bir kavram kaplamını ayırt etmeyi mümkün kılan şey bilakis sıfırın mutlak başlatıcı varoluşudur. Sayı burada önce gelir: Kavramın tatbikinin bağlı olduğu o *varlık noktasıdır*. Hiçliğin sayısı olarak sayı ya da sıfır, her metni gizil varlığına diker. Boşluk, düşüncenin bir ürünü değildir, zira düşünce onun varlığından türer; “düşünmek ve olmak aynı şey” olduğu sürece. Bu anlamda kavram sayıdan gelir, sayı kavramdan değil.

2.19 Frege’nin teşebbüsü bazı bakımlardan eşsizdir: (Dedekind ve Cantor’un yapacağı gibi) matematik içinde yeni kavramlar yaratmak değil, sadece titiz bir analiz aracılığıyla düşüncenin mümkün nesneleri arasında sayı kavramının çatısı altında toplananları tekilleştiren şeye ışık tutmak söz konusudur burada. Bu anlamda benim

çabam da aynı hatta ilerliyor. Sadece, yeni parametrelerle göre soruşturmanın çerçevesini düzelterek engelleri ortadan kaldırmak gerekiyor. Söz konusu olan bilhassa düşüncenin sırf kavramlar ve önermelerden değil, aynı zamanda düşünceyi bizzat tatbik edildiği *an* içinde devreye sokan kararlardan oluştuğunu göstermektir.

3. Frege'nin çağdaş bir kullanımı üzerine ek not

- 3.1 1965 tarihli “La suture” (altbaşlığı “Gösteren Mantığının Ögeleri” şeklindeydi) başlıklı bir konferansta¹⁴ Jacques-Alain Miller, Frege'nin sayı inşasını yeniden ele almıştı. Söz konusu metin, yapısalcılık ile Lacancı özne teorisi arasında bir uyum rejiminin temelini atar. Bozmak pahasına da olsa, ben de bu temele¹⁵ dönem dönem geri dönüyorum. 25 yıl sonra “Buradayım, hâlâ burada¹⁶”.
- 3.2 Miller'in Frege'ye yönelttiği soru şöyledir: “Doğal tam sayılar dizisinde işler halde olan şey nedir?”; ve bu soruya yanıtı, Frege'den zorla kopardığı yanıt şudur: “Dizinin oluşumunda işler halde olan şey, varlığı tanınmayan öznenin fonksiyonudur.”

14 J. -A. Miller'in metni için bkz. *Cahiers pour l'analyse*, no. 1, Paris, Seuil, Şubat 1966. Bu metne ek olarak derginin aynı sayısında yer alan Y. Duroux'nun Frege'de ardıl fonksiyonu ayrıntılı olarak inceleyen “Psychologie et logique” adlı metnine de başvurmak faydalı olacaktır.

15 Bkz. A. Badiou, “Marque et Manque: à propos du Zéro”, *Cahiers pour l'analyse*, no. 10, Paris, Seuil, Mart 1969.

16 “J'y suis, j'y suis toujours.” Rimbaud'nun 1872 tarihli “Qu'est-ce pour nous, mon cœur, que les nappes de sang” adlı şiirinden.—çn

- 3.3 Bu yanıtı ciddiye alacak olursak, kendi varlığının tamnamışlığına özgü modda, sayının özü değilse de en azından hasıl olma (Miller “ilerleyişin yaratılışı” diye adlandırır) sürecini oluşturan şeyin son tahlilde, Lacan’ın öğretisinin bize kavramını ilettiği haliyle öznenin fonksiyonu olduğu anlamına gelir.

Böylesine radikal bir tezi elbette göz ardı edemeyiz. Açık bir şekilde sayının “öznel” olduğu fikrinin reddine yönelik özel bir argüman geliştiren Frege’nin doktrinine göre radikaldir (gerçi Frege için “öznel” tabirinin “temsilde yakalanmış” anlamına geldiği doğrudur; dolayısıyla da, öznenin Lacancı fonksiyonuyla elbette örtüşmez). Kendi tezim açısından da radikaldir, zira ben sayının bir varlık biçimi olduğunu ve öznenin fonksiyonunu dayanak alması şöyle dursun, bilakis öznenin fonksiyonunun, sayının ve bilhassa da boşluk (veya sıfır) denen o ilk sayı-varlığın varsayılması kaydıyla varlıktan kendi payına düşeni alacağını ileri sürüyorum.

- 3.4 Bu metnin, Lacan’a ait olmayan bu ilk büyük Lacancı metnin, gösteren doktrini açısından önemini ve öznenin bir zincirin etkilerine yakalanmasına dair büyük üstadın öğrettiği her şeyin kapsamını –henüz oturmamış olduğu bir dönemde– aydınlatmak için kullandığı analogiyi burada incelemeyeceğiz. Sadece *bizatihi sayıya dair düşünce* söz konusu olduğu ölçüde Miller’in metninin varsaydıklarını ve ileri sürdüklerini ele alacağız.

- 3.5 Miller’in ispatı aşağıdaki şekilde düzenlenmiştir:

- Sıfırı temellendirmek için Frege (2.6’da görmüş olduğumuz gibi) “kendisiyle özdeş olmama” kavramına

başvurur. Hiçbir nesne bu kavrama dahil olamaz. Bu noktada Miller, Frege'nin Leibniz'e referansını vurgular, hatta derinleştirir. Fiilen bir nesnenin kendisiyle özdeş olamayacağını veya kendisinin yerine geçemeyeceğini varsaymak, hakikati tamamen tahrip etmektir. A nesnesi hakkındaki bir önerme, doğru olması için, önermenin her vuku buluşunda ya da önermenin dile getirildiği "her sefer"de A'nın değişmezliğini varsayar. "A, A'dır" önermesi her olanaklı hakikatin bir yasa-sıdır. Buna mukabil, hakikatin emniyette olması için hiçbir nesnenin "kendisiyle özdeş olmama" kavramının çatısı altında toplanmaması hayati önemdedir. Bu kavramın kaplamını sayan sıfır buradan gelir.

- Böylelikle sayının, doğruluk koşuluyla sadece kavramdan geldiği ispatlanır. Fakat bu ispatın tutarlı olmasının tek nedeni, *düşüncede kendisiyle özdeş olmayan bir nesneyi çağırabilmiş olmamızdır*: her ne kadar bu nesne sıfıra kaydolmasıyla kapı dışarı edilse de. Miller, "Öyleyse," diye yazar, "sayının yerine kaydolan 0, söz konusu nesnenin dışlanması tamamına erdirir."

"Hiçbir nesne"nin kendisiyle özdeş olmama kavramına dahil olmadığını söylemek, anıldığı anda söz konusu nesnenin, geriye kalan tek izi tam da sıfır işareti olan o hiçlikte yok olmasına neden olmaktır: "Sıfır sayısında eksiği diken yer tutucuyu ayırt edebildik," diye karara bağlar Miller.

- Bu şekilde eksik olduğu ortaya çıkan *nedir*? Hangi "nesne"nin kendi eksikliğinin yer tutucusu ilk sayısal işaret olabilir; ve hangi nesne bütün sayılar zinciriyle ilişkili olarak, sadece yok olmak üzere beliren şeyin kaydedilemez yerini destekleyebilir? *Sayılar arasında*

ısrar eden nedir? Elbette, kendisiyle özdeş olmamanın atadığı o boş yere, içinde kaybolmak için bile olsa, hiçbir “nesne”nin gelemeyeceğini kabul etmemiz gerekir. Fakat tam da nesne olmayan, nesne-olmayana özgü olan, nesnenin imkânsızlığı olarak nesne vardır (veya burada daha kesin olarak, *existe* yerine *ek-siste*): yani özne. “Mantığın söyleminin kendisiyle özdeş olmayan olarak çağırdığı ve olduğu haliyle kendisini teşkil etmek için reddettiği, çağırdığı ve *hakkında hiçbir şey bilmek istemeyerek* reddettiği imkânsız nesneyi, sayılar dizisinde işleyen fazlalık olarak işlev görmesinden dolayı, özne olarak adlandırıyoruz.”

- 3.6 Miller’in Frege’den aldıkları ile kendine has bir şekilde Frege’de deşifre ettiklerini titizce birbirinden ayırmak gerekiyor. Üç aşamada ilerleyeceğim.
- 3.7 **BİRİNCİ AŞAMA.** Leibniz-Frege’nin, “*salva veritate*”-nin¹⁷ her nesnenin kendisiyle özdeş olmasını gerektirdiği önermesini Miller başlangıç noktası olarak alır. Leibniz’in bütün hayatı boyunca üzerinde çalıştığı ve Frege’nin ideografisinin kuşkusuz mirasçısı olduğu, gerçekliğin bütün olarak harfiyen tercüme edilmesinin örtük bir şekilde kabul edilmesidir bu. Bu bakımdan, Leibniz’le birlikte Miller’in “kendisiyle özdeş” ile “birbirinin yerine geçebilir” ifadelerini denk görmesi kesinlikle haklıdır; böylelikle nesne ile harf arasında bir

17 Doğruluğa hâlel gelmeden: Leibniz’in birbirlerinin yerine geçmesi hiçbir bağlamda önermelerin doğruluk değerini veya anlamını değiştirmeyen ifadelerin eşanlamlı olduğunu ileri süren ilkesi.—çn

denklik kurulduğuna işaret edilir. Bir nesnenin yerine geçebilirlik gerçekte ne demektir? Yalnızca harf tam anlamıyla kendi yerine geçebilir. “A, A’dır”, harflerin bir ilkesidir, nesnelerin değil. Kendisinden farkında özdeşleştirilebilir ve bir yerine geçilebilirlik sorusunun muhatabı olabilmesi için nesnenin, nesneyi hesaplama-ya uygun hale getiren tek merci olan harfin hâkimiyeti altında olması gerekir. A her an A ile özdeş değilse *hesaplama olarak* hakikat (veya daha ziyade gerçeğe uygunluk) çöker.

Dolayısıyla buradaki örtük hipotez, hakikatin *bir tür hesaplama olduğudur*. Ancak bu varsayımdan hareketle nesne önce harf olarak temsil edilmelidir; daha sonra, nesne-harfin kendisiyle özdeş olmaması hakikati kökten yıkar. Hakikat, bir tür hesaplamaysa, bu durumda kendisiyle özdeş olmayanın (özne) dışlanmasını sayan sıfır, bir harften ibarettir: 0 harfi. Böylelikle sıfırın, eksikliğin âtil yer tutucusu olduğu ve bir işaret üretimi olarak sayı dizisini “ileri iten” şeyin –içinde, ısrar edenin varlığının tanınmamasının ifade edildiği yinelemenin– öznenin fonksiyonu olduğu sonucunu çıkarmak kolaydır.

Daha basit bir şekilde söylersek: Şayet hakikat ancak özdeşlik ilkesi kabul edildiğinde güvendeyse bunun nedeni, nesnenin hakikat alanında sadece hesaplamaya sunulan harf olarak zuhur etmesidir. Durum böyleyse, sayı ancak eksik olmakta ısrar edenin yinelenmesi, zorunlu olarak nesne-olmayan (veya harf olmayan, zira ikisi aynıdır), “hiçbir şeyin yazılamayacağı” yer, kısacası özne olarak ayakta kalabilir.

- 3.8 Her ne kadar Leibniz felsefesinde, düşüncedeki üç ana yönelimden birinin arketipinin, yani konstrüktivist veya nominalist yönelimin (diğer ikisi, aşkın ve türeyimsel yönelimlerdir¹⁸) bulunduğunu teslim etmek gerekiyorsa da hiç kimse Leibnizci olmak zorunda değildir. Türeyimsel yönelimin bir taraftarı olarak hakikatin güvende olması için *tam da* Leibniz'in düşüncesindeki iki büyük düsturu imha etmek gerektiğini ileri sürüyorum: Çelişmemezlik ilkesi ve Ayırt Edilemezler ilkesi.
- 3.9 Bir hakikat, hakikatini belirlediği durumun kendisiyle özdeş olmamaya vardığını varsayar: Bu kendisiyle özdeş olmama, duruma “fazladan” bir çokluk, duruma ait olup olmadığı içsel olarak kararlaştırılamayan bir çokluk eklenmesiyle tanınır. Bu eki ben “olay” olarak adlandırdım; ve bir hakikat-sürecinin kaynağı daima bir olaydır. Kararlaştırılamayan olayın durum içinde kararlaştırılması gerektiğinde durum zorunlu olarak kendi kimliğinde bir salımma girer.
- 3.10 Durumun barındırdığı bilgi katmanlarını delen bir hakikat-süreci, kurulu hiçbir dilin kavramlar dizininin işaret etmeye muktedir olmadığı ayırt edilemez sonsuzluk olarak duruma kaydolur.
- Sıfır veya boşluğun, doğruluğa hâlel gelmemesiyle aslında hiçbir alakasının olmadığını söylemek kâfi: Doğruluğa hâlel gelmemesi, olayın karar verilemezliği ile durumda bunun sonucu olan şeyin ayırt edilemezli-

18 Düşüncede yönelimlerin tipolojisi üzerine, bkz. *L'Être et l'Événement*, s. 311-315.

ği arasındaki “girift” korelasyonda cereyan eder. Hakikati harfin gücüne havale etmek de mümkün değildir, zira bir hakikatin varlığı hiçbir kayıtle tasdiklenemez. “Hakikat şöyledir” gibi bir önerme, “kendisiyle özdeş olmama” kavramı kapsamına hiçbir nesnenin girmemesini ve dolayısıyla sıfırın bu kavramın sayısı olmasını sağlamak bir yana, daha ziyade aşağıdaki üçlü sonuca olanak verir:

- kendisiyle özdeş olmayabilecek bir nesne vardır (olayın karar verilemezliği);
- hiçbir kavramın kapsamına girmeyen sonsuz nesne vardır (bir hakikatin ayırt edilemezliği);
- sayı, hakikatin bir kategorisi değildir.

3.11 *İKİNCİ AŞAMA.* Miller’in metninin stratejisi nedir? Ve bu stratejide bizatihi sayı ne gibi bir rol oynar? Gerçekten de öznenin fonksiyonunun, sayının özünde, varlığı tanınmayan temel konumunda yer aldığını ileri sürmek mi söz konusudur? Alıntıladığım formülün bütün açıklığıyla dile getirdiği kuşkusuz budur: “[Sayı] dizisinin oluşum sürecinde (...) öznenin fonksiyonu (...) işler haldedir.” Daha kesin bir dille, eksikliğin yerinde sayı olarak sıfırla işaretlenmiş, iptal edilisinin yer tutucusu olarak öznenin fonksiyonu, sayı dizisinde yineleme veya tekrar işlevi gören şeyi açıklayabilecek yegâne olgudur: Dışlanmış olan özne (kendisiyle özdeş olmayan şey) bizzat hiç durmadan “bir adım daha” yineleyen işaretlerin ısrarı üzerinden kendini dahil eder: önce 0’dan 1’e (Miller “0, 1 diye sayılır” diye işaret eder), daha sonra belirsiz olarak n ’den $n+1$ ’e: “[Lacancı anlamda öznenin] sayının alanından dışlanması, yinelemeyle özdeştir.”

3.12 Miller'in metninin diğer bölümleri analogik gösterime yöneldiği için daha muğlaktır. Örneğin: "Sıfırın düzdeğişmecesesi olan sayı dizisi, onun metaforuyla başlıyorsa, sayı olarak dizinin üyesi olan 0, dönüşümlü bir temsil ve bir dışlama hareketine göre zincirin altında kendisini ileten eksikliği (mutlak sıfır) diken yer tutucudan ibaretse, sıfırın sayı dizisiyle ıslah edilen ilişkisinde öznenin gösteren zinciriyle kurduğu eklemlenmenin en yalın ifadesini tanımamıza engel olan nedir?" "Tanımak" tabiri, Frege'nin sayı doktrininin, öznenin gösteren zinciriyle ilişkisi için izomorf (maksimum halde) veya benzer (minimum halde), ama hiçbir şekilde özdeş olmayan bir "matris" (Miller'in mesele üzerine yazdığı başka bir makalenin başlığı) ileri sürdüğü fikriyle uyumludur. Frege'nin doktrini, Lacancı mantığın yerinde bir *analogon*'u olacaktır. Bu durumda Miller'in metni *sayı üzerine bir metin olmayacağı* için diyecek bir şeyimiz kalmaz. İki nedenle sayı üzerine olmayacaktır: Birincisi, sayıyı değil, Frege'nin sayı üzerine doktrinini (bu doktrinin içsel tutarlılığı veya geçerliliğine dair bir konum almadan) inceler; ikincisi, sayı dizisini, öznenin fonksiyonunun sayı dizisine dahil oluşunun fiili bir örneği olarak değil, gösteren mantığının didaktik bir vektörü olarak öne sürer.

3.13 Bu eleştirel kaytarma iki koşulun karşılanmasını gerektirir: sayı doktrini ile gösteren doktrini arasında özdeşlik veya örneklendirme değil, izomorfi veya benzerlik olması; ve Miller'in Frege'nin sayı doktrininin geçerliliğinin izahını vermemesi.

3.14 Bana göre (yani kendinde sayı düşüncesiyle ilgilenen herkese göre) her şeyin bağlı olduğu bu ikinci husus konusunda Miller baştan sona okuru muallakta bırakmaya devam eder. “Frege’nin sistemi”nden bahseder, fakat kendisine göre sayıya dair başarıyla tamamlanmış bir teorinin, özünde tamamen savunulabilir bir düşüncenin söz konusu olup olmadığı anlaşılmaz. Mahir ve girift çalışmasının hiçbir noktasında “Frege sistemi”nin içkin güçlüklerine, özellikle de sıfır, Russel paradoksunun etkisi, Zermelo aksiyomu ve dille varoluş arasındaki nihai bağ hakkında andığım sorunlara değinilmemesi çarpıcıdır. Böylelikle gösteren/sayı izomorfizminin, bir yanda Lacan ile öte yanda izlenen analogik amaç bakımından tutarsızlığı önemli olmayan tekil bir teoriye indirgenmiş bir Frege arasında olduğunu düşünmek *mümkündür*.

3.15 Elbette geriye bu tutarsızlığın *analojinin diğer kutbuna*, yani gösterenin mantığına aktarılmış olup olmadığını ortaya çıkarmak kalıyor. Frege’nin doktrininin burada elçilik ettiği farz edilen mantık açısından, gösteren mantığının Miller tarafından kurucu konuma yerleştirildiği düşünülecek olursa risk önemsiz değildir: “Birincisi (gösterenin mantığı) diğerinin (mantıkçı mantığı) ortaya çıkışını ele alır ve mantığın kökeninin mantığı olarak anlaşılmalıdır.” Bu kökenden türetme süreci, tutarsızlıktan mustarip bir şemanın (Frege’nin şemasının) özne temasıyla tamamlanmasından elde edilmişse ne olur? Fakat benim ilgilendiğim bu değil. Andığım koşullarda metin sayının yasalarıyla ilgilenmiyorsa işimiz burada bitmiş demektir.

- 3.16 **ÜÇÜNCÜ AŞAMA.** Bununla birlikte Miller'in bir şekilde sezgisel olarak kavranan (ve benim katılamayacağım) sayıya dair genel bir temsile bağlı kaldığı inkâr edilemez. Söz konusu olan, sayının bir "işler hal"de veya "bir ilerleyişin yaratılışı"nda kavrandığı fikridir; merkezî bir fikirdir, çünkü öznenin yinelemenin nedeni olarak tanındığı yer tam orasıdır. Sıfır işareti denen o kapiton noktasından hareketle tekrarla "inşa" edilen bir sayının imgesidir bu. Sayıyı geçiş, kendiliğın üretimi, meydana gelme olarak görmeyi sağlayan bu dinamik tema Miller'in metninin her yerine sinmiştir. Analiz tam da 0'dan 1'e "geçiş"e veya n 'den hareketle $n+1$ 'in "meydana gelmesi paradoksu"na odaklanır.
- 3.17 Tekrar ve geçiş olarak bu sayı imgesi, sayının özü üzerine her muntazam tartışmayı peşinen imkânsız hale getirir. Sayısal alanı ancak katediş yasaları (bunlar arasında en yaygını ardışıklık olsa da kesinlikle tek değildir) uyarınca *katedebiliyor* oluşumuzdan, neden illa söz konusu yasaların sayının varlığını teşkil ettiği sonucu çıksın ki? Bir sayıdan sonrakine veya bir sayı dizisinden limitine *bizim* nasıl geçmemiz gerektiği gayet güzel anlaşılır. Fakat sayının *bu tür geçişlerle tanımlandığı veya oluştuğu* sonucunu çıkarmak en azından ihtiyatsızlıktır. Sayının *geçmiyor olması*, ezelden beri varlığıyla eş-kaplamalı bir tomurcuklanmada konuşlanıyor olması gayet mümkündür (nitekim benim tezim de bu yönde). Ayrıca tıpkı bu konuşlanmada *bizim* ilerleyişimizi sadece zahmetli geçişlerle tanzim etmemiz gibi, düşüncemizin *var olan* sayılar olarak kavrayabileceklerinin büyük bir kısmını bilmiyor olmamız veya bugüne

kadar kullanmamış ya da bunlara geçişle erişmemiş olmamız mümkündür.

- 3.18 Tekrarı, ardışıklığı, geçişi sayının özü haline getiren “konstrüktivist” tez, *çok az* sayının var olduğu sonucuna ulaşır, çünkü “var olma”nın, böyle bir geçişin fiili desteği olmak dışında başka bir mümkün anlamı yoktur. Kuşkusuz sezgiciler bu yoksul perspektifi benimserler. Borel¹⁹ gibi yarı-sezgici biri bile doğal tam sayıların büyük çoğunluğunun sadece kurmaca ve erişilemez bir kütle olarak “var olacağını” düşünüyordu. Miller’in Frege’den ödünç aldığı Leibnizci tercihin, örtük bir sezgici tercihle ikiye katlanmış olması mümkündür.

Elbette gösteren mantığı ile sezgici mantık arasında birden fazla ortak nokta olduğunu kabul etmek gerekir; en azından sezgici mantığın sisteminde özneyi (“matematikçi özne”) kasten anması nedeniyle bile olsa. Fakat böyle bir tercih benim gözümde, bir öznenin işlemsel sezgisiyle ölçülen sayının sahasının dosdoğru sonlu olmasıyla sonuçlanan bir sayı doktrinine girmemek için ek bir neden olacaktır. Zira sayının alanı daha ziyade herhangi bir özneye kıyaslanamaz ontolojik bir yönergeci ve sonsuzca sonsuz içine gömülmüştür.

- 3.19 Öyleyse mesele şuna dönüşür: Leibniz’e karşı gerçek ayırt edilemezler olduğunu, sezgicilere karşı sayının geçmediğini, kalıcı olduğunu ve öznel temanın temellendirici kullanımına karşı sayının her türlü sonluluğu aştığını kabul ederek sayı nasıl düşünülebilir?

19 Örneğin É. Borel, “La philosophie mathématique et l’infini”, *Revue du mois*, no. 14, 1912, s. 219-227.

4. Dedekind

- 4.1 Dedekind²⁰ sayı kavramını bugün “naif” diye adlandırılabilir bir küme teorisi çerçevesinde sunar. “Naif” burada, şeyler ve düşünceyle ilişkili bazı varsayımları yineleyen bir çokluk teorisinin söz konusu olduğu anlamına gelir. Aslında “naif”, felsefi demektir.

Dedekind *Les Nombres, que sont-ils et à quoi servent-ils?* adlı metninin daha açılışında “şey tabirinden düşüncemizin her nesnesini anladığı”nı dile getirir ve biraz daha ileride, farklı şeyler “herhangi bir nedenle ortak bir bakış açısına göre birleştirildiğinde, düşüncede bir araya getirildiğinde bunların bir S sistemi oluşturduğu söylenir” diye belirtir. Dedekind’in verdiği anlamda bir sistem öyleyse düpedüz Cantor’un verdiği anlamda bir kümedir. Dedekind’in çalışmasının çerçevesi (Frege’de olduğu gibi) kavram değil, doğrudan saf çokluktur, düşüncenin nesnelerini bir (bir sistem) olarak sayan koleksiyondur.

- 4.2 Dedekind (Cantor gibi) özünde *ordinal* olan bir sayı kavrayışı geliştirir. Frege’nin kavrayışının temelin-

20 Dedekind’in sayı doktrini için başvuru metni: *Les Nombres, que sont-ils et à quoi servent-ils?*, çev. J. Milner ve H. Sinaceur, Paris, Navarin, 1979. Almanca ilk baskı tarihi 1888 [Orijinal adı: *Was sind und was sollen die Zahlen?*].

de (kavramların kaplamaları arasında birebir ve örten eşlemeler *üzerinden*) *kardinal* olduğunu görmüştük (bkz. 2.3). Bu tezat ne anlama gelir? Ordinal vizyonda sayı, bir zincirin halkası olarak düşünülür, bir tam sıralamanın elemanıdır. Kardinal vizyonda sayı daha ziyade “aynı niceliğe” sahip nesne alanlarından soyutlamayla elde edilen bir “saf nicelik”in işaretidir. Ordinal sayı bir *dizi* şemasına göre, kardinal sayıysa bir *ölçüme* göre düşünülür.

- 4.3 Dedekind sonsuz sayının (örneğin tam sayıların tamamı) inşa bakımından sonlu sayıdan (her bir tam sayı, onun ardılı, vb.) *önce geldiğini* öne sürer. Sonsuz (belirsiz) bir sistemin varlığı, daha sonra da özel olarak N 'nin (doğal tam sayılar kümesi) varlığı Dedekind'in metninin (kendi numaralandırmasına göre) 66 ve 72 numaralı paragraflarının içeriğini oluştururken, “her n sayısı, kendisini takip eden n ' sayısından farklıdır” gibi görünüşte hayli temel nitelikte olan bir sonuç karşımıza 81 numaralı paragrafta çıkar.

Dedekind hakiki bir modernidir. Sonsuzun, sonluya kıyasla *daha basit* olduğunu, varlığın en genel niteliği olduğunu bilir: Öznenin yerine dair ilk kez Pascal'ın radikal sonuçlar çıkardığı bir sezgi.

- 4.4 Dedekind başlamak için felsefi “sistem” kavramını veya herhangi bir çokluk kavramını kabul etmeye davet eder (bkz. 4.1). Böylelikle ana işlemci, Frege'de olduğu gibi (bkz. 2.3) iki sistem arasındaki birebir ve örten eşleme fikri olur. Bununla birlikte Dedekind bunu, Frege'nin önerdiğinden çok farklı bir şekilde kullanır.

Birebir ve örten eşlemenin, biyektif fonksiyonun, o dönemde sayı üzerine düşünen bütün düşünürlerin anahtar nosyonu olduğunu belirtelim. Frege'nin düşüncesini, Cantor'un, Dedekind'in düşüncesini düzenleyen nosyon odur.

4.5 Dedekind fonksiyon veya eşlemeyi “uygulama” olarak ve bizim biyektif veya birebir ve örten bir eşleme olarak adlandırdığımız şeyi “benzer uygulama” olarak adlandırır. Her durumda, aşağıdaki koşulları sağlayacak şekilde bir S kümesinin (veya sisteminin) her elemanını S' kümesinin bir elemanı ile eşleştiren bir f fonksiyonu söz konusudur:

- S kümesinin s_1 ve s_2 adlı iki farklı elemanı ile S' kümesinin $f(s_1)$ ve $f(s_2)$ adlı iki farklı elemanı eşleşir;
- S' kümesinin her elemanı f üzerinden S kümesinin bir elemanı ile eşleşir.

Sadece birinci koşula uyan bir fonksiyon, *ayrı* fonksiyon (günümüzde buna birebir fonksiyon diyoruz) olarak adlandırılır:

$$[(s_1 \neq s_2) \rightarrow (f(s_1) \neq f(s_2))]$$

Elbette bir S sistemi ile başka bir S' sistemi “arasında” değil, bir S sistemi “içinde” tanımlanmış f fonksiyonları düşünebiliriz. Bu tür fonksiyonlar (veya uygulamalar) S kümesinin her elemanı ile S kümesinin bir elemanını (aynı elemanı veya bir başka elemanı: En azından ele alınan eleman için fonksiyon, özdeşlik fonksiyonu olabilir) eşleştirecektir.

4.6 Bir S sistemini alalım: f , S sisteminin kendisinde bir uygulama (illa benzer veya birebir ve örten bir uy-

gulama değil) ve s , S sisteminin bir elemanı olsun. s elemanından hareketle tekrarlayarak elde edilmiş fonksiyon değerlerinin kümesini, f uygulaması için s elemanının zinciri olarak adlandıracacağız. f için s zinciri öyleyse elemanları $s, f(s), f(f(s)), f(f(f(s))), \dots$, vs. olan kümedir.

Burada sonsuz bir tekrar olduğunu düşünmeyin: Belirli bir mertebeden sonra elde edilen değerler kendisini yineleyebilir. S sonluysa durum açıkça böyledir, zira S sisteminin elemanları olan mümkün değerler (f uygulaması S sisteminden S sistemi içine işlem yapar) sonlu sayıda bir safhada tükenir. Fakat p için f fonksiyonunun özdeş olduğu, f fonksiyonunun bir p değerine denk geldiğimizde de böyle olur. O durumda $f(p) = p$ şeklindedir ve dolayısıyla $f(f(p)) = f(p) = p$ olur. Fonksiyon p değerinde *durur*.

4.7 Bir N sistemi içinde N sisteminin aşağıdaki üç koşula uyan bir f uygulaması varsa N sisteminin *basitçe sonsuz* (Dedekind'in ifadesi) olduğu söylenecektir:

1) N içinde N sisteminin f fonksiyonu, ayrı bir fonksiyondur (bkz. 4.5).

2) N sistemi, bu sistemin elemanlarından birinin zinciridir ve Dedekind bunu 1 ile gösterir ve N 'nin *taban elemanı* olarak adlandırır.

3) Taban eleman 1, f üzerinden N 'deki hiçbir elemanın eşlemesi değildir. Başka bir deyişle, N 'ye ait olan n ne olursa olsun $f(n) \neq 1$: f fonksiyonu asla 1'e "geri dönmez".

Böyle bir N 'yi çok kolay bir şekilde tasavvur edebiliriz. 1 elemanıyla "başlarız". $f(1)$ 'in, N 'nin 1'den farklı

bir elemanı olduğunu biliyoruz (3. koşul). $f(f(1))$ 'in 1'den (1 kesinlikle f için bir değer değildir) farklı olduğunu görebiliriz. Fakat $f(f(1))$ aynı zamanda $f(1)$ 'den de farklıdır. Gerçekte f fonksiyonu (1. koşul) ayrı bir uygulamadır. Dolayısıyla iki farklı eleman f üzerinden farklı elemanlarla eşleşecektir. 1'in $f(1)$ 'den farklı oluşundan $f(1)$ 'in $f(f(1))$ 'den farklı olduğu sonucu çıkar. Aynı düşüncenin $f(f(f(1)))$ 'in 1'den, $f(1)$ 'den ve $f(f(1))$ 'den farklı olduğu sonucuna varmamıza olanak vereceğini sezgisel olarak hissedebiliriz (fakat Dedekind *kanıtlama* peşindedir). Daha genel olarak f fonksiyonunun tekrarlanmasıyla elde edilen her eleman, “önce gelen” her elemandan farklı olacaktır. N, bu şekilde oluşturulmuş zincir olduğu için (2. koşul), her bir elemanın 1'le başlayan ve f 'nin sürekli uygulanmasıyla devam eden işlemin her ek adımında “ortaya çıkması” anlamında N, f fonksiyonu tarafından sıralanmış, hepsi farklı olan “sonsuz” (sezgisel anlamda) elemandan oluşacaktır.

- 4.8 Bu şekilde tanımlanmış N “sistemi” sayının yeridir. Neden? Çünkü böyle bir N kümesinin n elemanları üzerinde bütün alışıldık “sayısal” işlemler tanımlanabilir.

f fonksiyonu sayesinde bir sayının “ardıl”ı kavramına kolaylıkla geçebiliriz: n bir sayıysa, $f(n)$, n 'nin ardılıdır. Dedekind'in “ordinal” yaklaşımı burada yürürlüğe girer: Zincir kavramı aracılığıyla f fonksiyonu, N'yi bir tam sıralama uzamı olarak tanımlayan fonksiyondur. Bu sıralamanın birinci “noktası” elbette 1'dir. Felsefi nedenlerle (bkz. 1.17) Dedekind 0 işareti yerine 1'i tercih eder; “1” bir zincirin ilk halkasına işaret edi-

yorken, sıfır bizzat varlığında “kardinal”dir: Eksikliği, tüm boş kaplamalar sınıfını işaretler.

1 ve ardışıklık işlemcisi sayesinde ilk önce sayıların sıra yapısıyla ilgili birincil teoremleri, daha sonra aritmetik işlemlerinin, toplama ve çarpmanın tanımını bir güçlük olmadan elde edebiliriz. Böylelikle sadece “sistem” (veya küme) ve “benzer fonksiyon” (veya birebir ve örten eşleme) kavramlarından hareketle sayısallığın “doğal” krallığı bulunacaktır.

- 4.9 Yukarıdaki (4.7) üç koşula uyan bir f fonksiyonuyla yapılanmış bir N sistemi, “bir sayılar sistemi”, sayılar kümesinin yeri olarak adlandırılacaktır. Dedekind’den alıntılarsak:

f uygulamasıyla sıralanmış basitçe sonsuz bir N sistemi ele alındığında, elemanların tikel bileşimini tamamen soyutlarsak, sadece bunları birbirinden ayıran şeyleri tutar ve sırayı tanımlayan f uygulamasının bunlar arasında kurduğu bağıntıları dikkate alırsak bu sayıları doğal sayılar veya ordinal sayılar veya hatta sayılar olarak adlandıracamız; ve taban elemanı 1, N sayıları serisinin taban sayısı olarak adlandırılacaktır. Elemanların her türlü içerikten azat edilmesiyle (soyutlama) ilişkili olarak, sayıları haklı bir şekilde insan zihninin özgür bir yaratımı olarak tanımlayabiliriz.

Dedekind’in üslubundaki coşku aşikârdır. S “sistemi”ni tamamen fonksiyonel ve ordinal bir şekilde üretmesi nedeniyle Dedekind’in sayıyı saf düşünce dışındaki bütün yargılama alanından çıkardığının farkında

olmasından kaynaklanır bu coşku. Kitapçığının birinci baskısında önsöz işlevindeki “duyuru”nun üslubu ve sürdüğü pey de böyledir: “Aritmetiği (cebir, analiz) sadece mantığın bir parçası olarak tanımlayarak sayı kavramının zaman veya uzama dair temsiller veya sezgilerden tamamen bağımsız olduğunu ve dolaysız bir şekilde düşüncenin saf yasalarından ortaya çıktığını söylüyorum.” Bunun, Kant’la açıklanabilecek bir metin olduğu görülüyor: Sayı üzerinde düşünen modernlerin bütün sorunu, Platon-Kant-Leibniz üçgeninde gezinmeleridir.²¹ “Bir” sayıyı değil, N’yi, sayıların sonsuz “sistemi”ni tanımlayan Dedekind haklı bir iftiharla sırf düşüncenin kuvvetiyle sayısallığın kavranabilir yerine yerleştiğini düşünür.

- 4.10 Sıfır, sonra da sayı kavramıyla değil, kavramdan varoluşa geçiş veya dilin varlık üzerindeki yargı yetkisiyle ilgili olan Frege’nin güçlüklerini bilen kişiler olarak şöyle sorabiliriz: Bir sayılar sistemi, “basitçe sonsuz” bir N sistemi *var mıdır*? Yoksa beklenmedik bir “paradoks” bizim için Dedekind’in entelektüel coşkusunu yumuşatacak mıdır?

21 Ayrıca Frege’nin Leibnizci, Peano’nun Kantçı ve Cantor’un Platoncu olduğu ileri sürülebilir.

Çağımızın en büyük mantıkçısı K. Gödel en önemli üç filozofun Platon, Leibniz ve Husserl olduğunu düşünüyordu. Husserl onda, tabir caizse, Kant’ın yerini tutmaktadır.

Dolayısıyla matematiğin sorduğu üç büyük soru şunlardır:

- a) saf kavranabilir olanın gerçekliği, matematiğin düşündüğü şeyin varlığı (Platon);
- b) iyi oluşturulmuş dil, çıkarımın kesinliği, hesaplama yasası (Leibniz);
- c) anlamın oluşumu, önermelerin evrenselliği (Kant, Husserl).

4.11 Dedekind elbette kendi sayı sisteminin varlığı konusunda kaygılanır. Varlığını kanıtlamak için üç safhada ilerler:

1) Sonsuz bir sistemin (veya kümenin) ne olduğuna dair, felsefeye veya sezgiye başvurmadan, içsel bir tanım.

2) Sonsuz bir sistemin varlığının ispatı (göreceğimiz gibi, hayli spekülatif bir ispat).

3) Her sonsuz sistemin “basitçe sonsuz bir N sistemi parçası olarak içerdiği” gerçeğinin ispatı.

Bu üç nokta şu sonucu çıkarmaya olanak verir: En az bir sonsuz sistem var olduğu ve her sonsuz sistem alt-sistem olarak bir N'ye, basitçe sonsuz bir N sistemine veya “sayının yeri”ne sahip olduğu için bu yer vardır. Bu da şu anlama gelir: Sayı vardır. “Aritmetiğin, mantığın bir parçası olması”, sırf saf düşüncenin kavramsal çabası aracılığıyla hem sayısallığın kavranabilir bir yerinin tutarlılığını hem de böyle bir yerin fiilî varlığını temin edebilirim anlamına gelir.

4.12 Dedekind'in sonsuz bir kümeye dair önerdiği tanım kayda değerdir. Kendisi de haklı nedenlerle bu tanımla gurur duyar. Şöyle yazar: “Sonsuzun tanımı (...) tüm araştırmamın çekirdeğini oluşturuyor. Sonsuzu sonludan ayırt etmek için yapılan, bildiğim tüm diğer deneyimler o kadar az başarıya ulaşmış görünüyor ki bunların bir eleştirisini yapmasam da olabilir.”

Bu sonsuz tanımı, Galileo tarafından yapılmış bir yorumu sistematikleştirir: Tam sayılar ile bu sayıların tam karesi olan sayılar arasında birebir ve örten bir eşleme vardır. $f(n) = n^2$ diye yazmak yeterli. Bununla bir-

likte karesi alınmış sayılar tam sayıların öz parçasıdır (bir kümenin öz parçası, bütünden farklı olan bir parçadır, gerçekten “kısmi” olan bir parçadır). Dolayısıyla, sezgisel olarak sonsuz kümeler incelendiğinde bütün küme ile bu kümenin öz parçalarından biri arasında birebir ve örten eşlemeler var gibi görünmektedir. Sonuç olarak söz konusu parçanın, kümenin kendisi “kadar” elemanı vardır. Galileo bundan fiilî sonsuz kümeleeri düşünmeye çabalamanın absürt olduğu sonucuna varmıştı. Sonsuz bir küme öz parçalarından biri “kadar büyük” olduğu (en az “o kadar” eleman içerdigi) için, sonsuz bütünler söz konusu olduğunda “bütün, parçadan büyüktür” önermesi görünüşe göre yanlıştır. Gelgelelim bu önerme Öklid’in *Elemanlar*’ının bir aksiyomudur ve Galileo bunun reddedilebileceğini aklına bile getirmez.

Dedekind bu paradoksu cesur bir şekilde sonsuz kümelerin *tanımına* dönüştürür: “Öz parçalarından birine benziyorsa bir S sisteminin sonsuz olduğu söylenir; zıt durumda, S ’nin sonlu bir sistem olduğu söylenir” (Dedekind’in sözlüğünde “sistem”in küme, iki sistem arasındaki benzerliğin de bunlar arasında birebir ve örten bir eşleme olduğu anlamına geldiğini hatırlatalım).

- 4.13 Dedekind’in tanımının en çarpıcı yanı, sonsuzu *pozitif* olarak belirlemesi ve sonluyu negatif olarak ona tabi kılmasıdır. Dedekind’de hep olduğu gibi, bu onun hayli modern vurgusudur. Sonsuz bir sistem varoluşsal bir doğaya sahip bir özellik taşır: Onunla öz parçalarından biri arasında birebir ve örten bir eşleme vardır. Sonlu, böyle bir özelliğin *var olmadığı* durumdur. Sonlu sade-

ce sonsuz olmayandır ve düşüncenin tüm pozitif sadeliği sonsuza bağlıdır. Sonsuzun gözüpek bir şekilde tümünden laikleştirilmesi, erdemlerini henüz tüketemediğimiz (biz, yani hâlâ dini bağımlılığımızın okunur olduğu “sonlu”nun beceriksiz partizanları) bir hamledir.

- 4.14 Dedekind’in yaklaşımının üçüncü noktası (her sonsuz sistem, N türü bir sistemi, sayının bir yerini, parçalarından biri olarak içerir, bkz. 4.11) mükemmel bir zarfete sahip bir ispattır.

Bir S sisteminin sonsuz olduğunu varsayalım. Sonsuz sistemlerin tanımına göre S ile öz parçalarından biri olan S' arasında birebir ve örten bir f eşlemesi bulunur. Başka bir deyişle, S kümesinin her elemanı ile S' kümesinin bir elemanını eşleştiren biyektif bir f fonksiyonu bulunur. S' , S kümesinin bir öz parçası olduğu için S kümesinin S' kümesinde olmayan en az bir elemanı vardır (aksi takdirde $S=S'$ olurdu ve bu durumda S' “öz” parçası olmazdı). Böyle bir eleman seçelim ve bunu 1 olarak adlandıralım. f fonksiyonu için 1 zincirini düşünelim (“zincir” için, bkz. 4.6). Şunları biliyoruz:

- f ayrı (birebir) bir uygulama veya fonksiyondur, çünkü S ile S' arasında birebir ve örten eşlemedir ve her birebir ve örten eşleme ayrıdır.

- f üzerinden 1 , zincirin başka hiçbir terimiyle eşleşmez, zira 1 'i S' kümesi dışında seçtik ve f , S kümesinin elemanlarıyla sadece S' kümesinin elemanlarını eşleştirir. Dolayısıyla zincirde $f(s)=1$ olacak şekilde bir s elemanı var olamaz. Zincirde fonksiyon asla 1 'e “geri dönmez”.

Dolayısıyla S içinde, f için l 'in zinciri basitçe sonsuz bir N kümesidir: 4.7 numaralı paragrafta böyle bir N için belirlenmiş üç koşula uyar.

Sonsuz bir sistem varsa, S kümesinin bir parçası olarak bir N , sayının bir yeri de olduğu güvencesi böylelikle sağlanmış olur. Dedekind'in tezi nihayetinde şöyledir: Sonsuz varsa, sayı vardır. Bu husus (benzer bir uygulama için l 'in zinciri olarak sayının ordinal tanımı ve sonsuzun tanımı dikkate alındığında) tam olarak ispatlanmıştır.

- 4.15 Gelgelelim sonsuz var mıdır? İşte tüm mesele budur. Bu, Dedekind'in yaklaşımının ikinci noktasıdır; Frege'de sıfırın işgal ettiği yeri Dedekind'de sayının varoluşunun dayanağı olan sonsuzun işgal ettiğinin ortaya çıktığı nokta.
- 4.16 Geri kalan her şeyin (sonsuz bir sistem veya kümenin varlığı ve düşüncede tutarlılığı) dayanacağı şeyi ispatlamak için Dedekind aniden ilk baştaki bütün felsefi varsayımlara (düşüncenin nesnesi olarak şey) başvurur. Kuşkusuz bu varsayımlar, bizzat “sistem” fikrini (her türlü şeyler koleksiyonu) halihazırda zayıf bir şekilde destekliyordu. Fakat sonraki tanımlar (zincir, basitçe sonsuz küme) ve ispatların çekici yüzeyine kapılmış halde bu sistemin ne kadar narin olduğunu unuturuz. Dedekind'in metninde 66 numaralı paragrafta masumca “teorem” olarak beliren şeyin “ispatı”nı burada anlamak en iyisi:

66. *Teorem*: Sonsuz sistemler vardır.

İspat: Düşüncelerimin alanı, yani düşüncemin nesnesi olabilecek her şeyin S kümesi sonsuzdur. Çünkü şayet s , S kümesinin bir elemanıysa, s elemanının düşüncemin nesnesi olabileceği yönündeki s' düşüncesi de bizzat S kümesinin bir elemanıdır. Bu elemanı, s elemanının $f(s)$ görüntüsü olarak düşünürsek, bu şekilde tanımlanmış S kümesinin f uygulamasında, S' görüntüsünün S kümesinin öz parçası olma özelliği vardır; özel olarak S' , S kümesinin bir öz parçasıdır, zira S kümesinde bu tür s' düşüncesinden ayrı olan ve bu nedenle S' görüntüsünde içerilmeyen elemanlar vardır (örneğin, egom). Sonuç olarak s_1 ve s_2 , S kümesinin farklı elemanlarıysa bunların s_1' ve s_2' görüntülerinin de farklı olduğu açıktır; dolayısıyla bu uygulama ayrı bir uygulamadır. Sonuç olarak S sonsuzdur. CQFD.²²

4.17 Şaşkınlığımız geçtiğinde (fakat Spinoza'nın *Ethica* eserinin ilk önermelerini okuduğumuzda hissettiğimiz şaşkınlığa benzer bu) söz konusu varoluş ispatını yakından incelememiz gerekir.

4.18 Birkaç teknik açıklama. İspatın özü, “düşüncemin bir nesnesi” ile “bu, düşüncemin bir nesnesidir” düşüncesi arasındaki eşlemeyi, yani *bir düşünceyle o düşüncenin düşüncesi ya da özdeşünüm [réflexion] arasındaki eş-*

22 CQFD (Ce Qu'il Fallait Démontrer): “Böylece ispatımız sona erer” anlamına gelen ve kesin bir ispatın sonunda kullanılan Fransızca ifade.—çn

lemeyi, olanaklı düşüncelerim kümesinin elemanları arasındaki bir fonksiyon gibi ele almaktan oluşur (nitelikim “düşüncemin olanaklı bir nesnesi” ile olanaklı bir düşünce özdeşleştirilebilir). Bu fonksiyon “ayrı”dır (günümüzde birebir diyoruz), çünkü ayrı iki elemanın fonksiyon aracılığıyla iki ayrı elemanla eşleşmesi özelliğini taşır (ayrıca birebir ve örten eşlemeler de bu özelliği taşır). Nesnelerinin birbirinden ayırt etmeyi sağladığı iki düşünce verildiğinde, bu düşüncelerin iki düşüncesi de ayrıdır (ayrı düşünceleri düşündükleri için onların da ayrı nesneleri vardır). Dolayısıyla genel olarak düşüncelerle “bir düşüncenin düşüncesi” türündeki düşünceler arasında birebir ve örten bir eşleme olduğu sonucu çıkar. Ya da başka türlü söylersek, nesnesi herhangi bir şey olan düşünceler ile nesnesi bir düşünce olan düşünceler arasında böyle bir eşleme bulunur. Gelgelelim ikinciler tüm olanaklı düşünceler kümesinin bir öz parçasını oluşturur, zira düşüncelerin düşünceleri olmayan düşünceler vardır: Dedekind’in çarpıcı örneği, “ego” olarak adlandırdığı şeydir. Dolayısıyla bütün olanaklı düşüncelerimin kümesi, kendi öz parçalarından biriyle birebir ve örten bir eşleşme içinde olduğu için, sonsuzdur.

4.19 Dedekind’in yaklaşımı, *Descartes’in Cogito’su ile Spinoza’daki fikrin fikrinin çok özel bir kombinasyonudur.*

Kalkış noktası, olanaklı bütün düşüncelerin “kapalı” yapılanması, saf düşüncenin varoluşsal noktası olarak bizzat Cogito’nun uzamıdır. Bütün olanaklı düşüncelerimin kümesi olarak bir şeyin var olduğu verilidir (fakat bunu bize sadece Cogito garanti eder).

Spinoza'nın nedensel "seriyalizm"iyle (Dedekind'in tarihsel kaynakları ne olursa olsun) hem basit fikirleri bunların nesneleriyle (Spinoza, fikri fikir olan cisim aracılığıyla, der) özdeşleştirmeye olanak veren bir "paralelizm"ın varlığı hem de nesnesi bir cisim değil, bir başka fikir olan "karmaşık" fikirlerin varlığını temin eden özdüşünümsel bir katlanmanın varlığı ilişkilendirilir. Spinoza için olduğu gibi Dedekind için de, bu özdüşünümsel katlanma işleminin *sonsuz gitmesi* gerekir. Bir fikrin fikri (veya bir nesneye dair düşüncenin düşüncesi) *bir fikirdir*. Dolayısıyla bir cisme dair fikrin fikrinin fikri, vs. olan bir fikir vardır.

Dedekind'in sonsuz bir sistemin var olduğu sonucuna varabilmesi için tüm bu temalar zorunludur. Olanaklı düşüncelerim kümesinde çevresi çizilmiş, Bir işaretiyle temsil edilebilir bir "yer" olması gerekir. Bu yerde Descartes'ın Cogito'da varlığını ve özünü (saf düşünce) tespit ettiği haliyle ruhu, "düşünen şey"i tanımak mümkündür. İki farklı nesneye iki farklı fikir bağlanacak şekilde bir fikrin nesnesiyle özdeşleşebilir olması gerekir. Eşlemenin birebir ve örten karakterini sadece bu sağlar. Son olarak özdüşünümsel işlemin sonsuz gitmesi gerekir, aksi takdirde fonksiyon üzerinden eşlemesi olmayan düşünceler var olacaktır; üzerine düşünce olmayan düşünceler. Bu ise argümanı yıkacaktır, zira bütün olanaklı düşüncelerim kümesinin, yani S kümesinin *her* elemanı ile özdüşünümsel düşüncelerim kümesinin ya da S' kümesinin bir elemanının eşleşeceği kesin olmayacaktır. Son olarak bilhassa özdüşünümsel *olmayan*, bir düşüncenin düşüncesi olmayan en az bir düşünce olmalıdır. Özdüşünümsel

düşünceler kümesinin, yani S' kümesinin, olanaklı düşüncelerim kümesinin, yani S kümesinin bir öz parçası olmasını sadece bu sağlar. Bu sabit fark noktasında, Dedekind'in "egom" olarak adlandırdığı, bizatihi Cogito'yu tanıyabiliriz. *Bir düşüncenin düşüncesi olarak düşünölmeye olanak vermeyen şey bizzat düşüncenin edimidir, "ben düşünüyorum" dur.* "Düşünüyorum" parçalara ayrıştırılamaz, onu bir *başka* düşüncenin düşüncesi olarak dile getirmek imkânsızdır, zira bütün diğer düşünceler onu varsayar.

Dedekind için en nihayetinde sayının, her özdüşünümün dayanağı (özellikle bir "düşündüğümü düşünüyorum" vardır) olan, fakat kendisi özdüşünümün dışında yer alan Cogito'nun saf bir varoluş noktası olması kaydıyla var olduğunu söylemek abartılı olmaz. Sonsuzun ve dolayısıyla sayının varoluşsal temeli, Sartre'ın "özdüşünümsellik öncesi Cogito" olarak adlandırdığı şeydir.

Dolaylı olarak burada Jacques-Alain Miller'in tezinin bir başka biçimini buluruz: Sayıya dayanak olan şey öznedir. Aradaki fark şudur: Miller'e göre öznenin fonksiyonunu zorunlu kılan, sayıyı "meydana çıkarma işlemi"yken Dedekind için sayının yeri olarak sonsuzun varlığıdır. Frege'nin sıfırı kavramsal olarak tüm-dengelemlerle çıkarsama girişimiyle Dedekind'in sonsuzu yapısal olarak tüm-dengelemlerle çıkarsama girişimi aynı noktaya getirir: ya eksikliğin ısrarı olarak ya da saf varoluş noktası olarak özne. Lacan'ın öznesi sıfırın yaratılışına, Descartes'ın öznesi sonsuzun varlığına isnat edilebilir. Sanki sayıya dair düşüncenin üç büyük modern sorunundan (sıfır, sonsuz, Bir'in kaybı) ikisi, üçüncüsü

bir küme teorisi kisvesi altında kabul edildiğinde, sadece modernitenin o büyük *felsefi* kategorisinin radikal bir kullanımıyla çözülebilirmiş gibidir: özne.

- 4.20 Frege'yi takip edecek kadar Leibnizci olmadığım gibi, Dedekind'i takip edecek kadar Kartezyen veya Spinozacı olmadığımı söylemekle yetinebilirdim.
- 4.21 Dedekind'in Spinozacılığına karşı: Düşünceden düşüncenin düşüncesine ve düşüncenin düşüncesinin düşüncesine, vs. sonsuz bir tekrar fikri, sayının yerinin varlığını temellendirmek şöyle dursun, *bu yeri varsayar*. Aslında bu tür hiçbir deneyimimiz yoktur. Sadece sayı dizisinin varoluşu ve *bunun sonucunda* sayı dizisi düşüncesi, durmadan kendisini yansılayan bir özdeş-nümü temsil etmemize ve sayısal kurmaca oluşturmamıza olanak verir. Kendisinin mesela dördüncü veya beşinci düzeyden yansımasında bir "düşünce"yi dile getirme olanağı açıkça sayıların soyut bilgisini koşul olarak gerektirir. "Sonsuza giden" bir düşünce fikriyse kuşkusuz ispatlamak istediğimizi, yani sonsuzun düşüncedeki etkisini içerir; bu etki üzerine tefekkürün tek yoluysa sayının matematiğidir.
- 4.22 *Varoluş* meseleleriyle ilgili olarak Spinoza'nın kendisi Dedekind'in ilerlediği yolda ilerlememeye özen gösterir. Spinoza sonsuzun varlığını hiçbir şekilde fikirlerin yinelenmesinden çıkarmaya çalışmaz. Tersine, tözün sonsuzluğunu koyutladığı için bir cismin fikrinden fikirlerin fikirlerinin fikirlerine, vs. giden zincirin sonsuz olduğunu ispatlayabilir. Ona göre (ayrıca haklıdır

da) sonsuzun varlığı *bir aksiyomdur*. Onun meselesi daha ziyade “öteki taraf”la ilgilidir; cisim tarafıyla (veya Dedekind için nesne). Zira fikirler zinciriyle cisimler zinciri arasında kesin bir paralellik varsa fikrin fikri karşısında bir “cismın cismi” olması gerekir; ve böyle bir şeyin gerçekliğini kavrayamayız. Dedekind bu engelden kaçınır, çünkü onun için düşüncelerin yeri Kartezyen kapanma özelliğine sahiptir: Cisimsel dışarısı, kaplayım [*étendue*] niteliği, devreye girmez. Fakat Spinozacı tekrardan sonsuz üzerine nihai bir tez çıkarma çabasında sadece bir fasit daire üretmiş olur.

- 4.23 Dedekind’in Kartezyencililiğine karşı: *Her düşüncenin bir düşüncenin nesnesi olabilmesi ispat açısından temeldir*. Bu tema tartışmasız bir şekilde Kartezyendir: “Düşünüyorum”, düşüncenin “malzemesi” olarak genel anlamda fikirlerin varlığının dayanağıdır ve düşünülebilir bir fikir olmayan, yani (olanaklı düşüncelerim kümesinden bahsettiğimize göre) düşüncemin nesnesi olarak fiilen gerçekleştirilebilir olmayan bir fikrin olmadığı açıktır. Fakat bu açıkça “id”in ben o düşüncüyü düşünmeden ve hatta düşünmem *mümkün* olmasa da düşünebileceğini dışlamaktır. Dedekind, Freud’dan itibaren düşündüğü ve düşüncelerinden bazıları düşünemeyeceğim şeyler olarak tanımlanacak koşullarda düşündüğü açıklığa kavuşturulmuş bilinçdışını dışlamasıyla Kartezyendir. “Bilinçdışı düşünceler”, en azından doğrudan düşüncemin nesnelerine dönüşemeyecek düşüncelerdir.

Daha genel olarak çağdaş bir filozof için, *hakiki düşüncelerin*, türeyimsel bir hakikat prosedürüne dahil

olan düşüncelerin, bunların özdüşünümünün figüründe olduğu haliyle gösterilebileceği kuşkuludur. Bu, bilgi figürüne (ki o da özdüşünümün figürüdür) indirgenmelerinin kendileriyle eşkaplamalı olduğunu tasavvur etmek olacaktır. Çağdaş felsefenin en sağlam fikri tam da hakikat sürecini sadece bilgide bir *gedik* olarak kavramasıdır. Şayet “düşünce” bir hakikat prosedüründe öznenin gerçekleşmesiye o halde bu düşüncenin düşüncesi yoktur, zira bu düşünceye dair bilgi yoktur. Dedekind’in yaklaşımı bilinçdışında çıkmaza girer ve bilgi ile hakikat arasındaki ayırım konusunda ödün verir.

- 4.24 Descartes’ın kendisi Dedekind’den daha basiretlidir. Sonsuzu özdüşünümünden veya bizatihi Cogito’dan çıkarsamaktan geri durur. Tanrı’yı kanıtlamak için, Dedekind’in yaptığı gibi olanaklı düşüncelerimin *toplamını* düşünmez. Tersine *bir* fikri, Tanrı fikrini tekilleştirir; öyle ki, Descartes’ın yerel argümanıyla Dedekind’in global veya küme teorisel argümanı zıt olarak konumlandırılabilir. Descartes’ın meselesi başka yerdedir, Frege’nin sorunuyla aynı türdedir: Kavramdan varoluşa nasıl geçilir? Bunun için *fikir ile fikrin yeri arasında* bir nispetsizlik argümanı gerekir: Sonsuz fikri, ruh veya Dedekind için olanaklı düşüncelerimin kümesi olan bu fikrin yeriyle kıyas sağlayacak ortak bir ölçüte sahip değildir, zira tözsel varlığında kavrandığında bu yer sonludur. Dolayısıyla sonsuza dair tekil fikir “başka yerden gelmelidir”, gerçek bir sonsuzun ürünü olmalıdır.

Descartes ve Dedekind’in konumlarının sonunda terse döndüğünü görüyoruz. Dedekind için sonsuz olan

yerdir, çünkü özdüşünümselliğin (Cogito'nun yetisi) sonsuza gitmesini desteklemesi gerekir. Descartes için sonsuz olan, yerin dışıdır (Tanrı), çünkü varlığı Cogito tarafından temin edilen düşüncelerimin yeri sonludur ve dolayısıyla tek başına sonsuz fikrine dayanak oluşturmaya *muktedir* değildir. Fakat yerin sonluluğunu kırmak isteğiyle Dedekind bu yerin, Başka bir yer tarafından tezgâhlanmış bir sahneden ibaret olabileceğini veya düşüncenin kendi ilkesine sadece sonsuz sayının (düşünce, bu sonsuz sayının özdüşünümsel olmayan ve sonlu âni olacaktır) *varsayılmasında* sahip olabileceğini unuttur.

- 4.25 İçkin veya argümantatif eleştiri: Dedekind'in hareket noktası "düşüncemin bütün olanaklı nesnelerinin alanı"dır ve bunu hemen S sistemi olarak adlandırmaya karar verir. Fakat bu alan *bir sistem, yani bir küme olarak düşünülmeye elverişli midir?* "Düşüncemin olanaklı nesneleri" *bir küme*, bir olarak sayılabilecek tutarlı bir çokluk oluşturur mu (düşüncemin bu sayma işlemini kimin yaptığı konusundaki belalı soruyu bir kenara bırakıyoruz)? Bizzat düşünce için bütünsel olarak bir araya getirilmesi tam da imkânsız olduğu için bu alan daha ziyade tutarsız bir çokluk değil midir? Lacan'ın imkânsız ile gerçeği özdeşleştirmesini kabul edecek olursak, düşüncemin *bütün* mümkün nesnelerinin "sistemi", bir-olarak-sayılmasının imkânsızlığı anlamında düşüncenin gerçeği olmayacak mıdır? Oysa "düşüncemin bütün olanaklı nesnelerinin alanı"nm sonsuz bir sistem olduğunu ortaya koymadan önce bir sistem (*bir küme*) olduğunu ortaya koymak gerekir.

4.26 Russel'in paradoksunun, Frege'nin sayıyı kavramdan hareketle türetmesini yıkması gibi, tüm kümelerin kümesi "paradoksu" da –öncekinin soyundan gelen bir paradoks– Dedekind'in sonsuzun varlığını ve bunun sonucunda sayının yeri olan N 'nin, "basitçe sonsuz" kümenin varlığını tündengelimle çıkarsamasını yıkar. Dedekind tarafından kusursuz çıkarımlarda kavramsal olarak tespit edilen sayının yeri, aynı zamanda varoluş sınaması da olan tutarlılık sınamasından geçemez.

4.27 "Dedekind usulü" akıl yürütelim. Nesnelerinin tekilliğinden soyutlanması içinde ele alman veya Dedekind'in dediği gibi sadece bu nesneleri "farklılaştıran şey"e (dolayısıyla sisteme ve sistemin yasalarına basit aidiyetlerine) göre düşünülmüş herhangi bir sistem (bir küme) elbette düşüncemin mümkün bir nesnesidir. Sonuç olarak düşüncemin olanaklı bütün nesnelerinden oluşan varsayılan S sisteminde bir altsistem (altküme) olarak bütün sistemlerin sistemi, bütün kümelerin kümesi yer alır. Bu bütün sistemlerin sistemi bu sıfatla bizzat düşüncemin mümkün bir nesnesidir. Basitleştirmek için bütün sistemlerin sisteminin bir düşünce olduğunu söyleyelim.

Gelgelelim bu durum imkânsızdır. Dedekind'in ispatının temel bir ilkesi, her düşüncenin, bu düşünce-nin düşüncesini doğurmasını gerektirir; ve söz konusu düşünce, ilk düşünceden farklı olmalıdır. Bütün kümelerin kümesi düşüncesi varsa bu durumda o düşünce-nin de bir düşüncesi vardır ve bütün mümkün düşüncelerim kümesi, yani S içindedir. Öyleyse S , bütün kümelerin kümesinden *daha büyüktür*, çünkü bütün kü-

melerin kümesinde yer almayan en az bir eleman içerir (bütün kümelerin kümesi düşüncesi). Böyle bir şeyse olamaz, çünkü S bir kümedir ve dolayısıyla bütün kümelerin kümesi içinde eleman olarak yer almalıdır.

Yahut: Küme, sistem olarak alınan düşüncemin bütün olanaklı nesnelerinin alanı S , bütün kümelerin kümesinin bir elemanıdır. Seri oluşturan veya özdeşleşimsel yasında düşünüldüğünde S , bütün kümelerin kümesinden taşar, çünkü bütün kümelerin kümesi denen o düşüncenin düşüncesini içerir. Dolayısıyla S , elemanlarından birinin –bütün kümelerin kümesi düşüncesi– aynı zamanda hem içinde (veya ondan “daha küçük”) hem de dışındadır (veya ondan “daha büyük”-tür). Öyleyse mantıksal tutarsızlığı dışlarsak, ya bütün kümelerin kümesinin, bütün sistemlerin sisteminin, üzerine düşünmüş olmamıza rağmen, *düşüncem için mümkün bir nesne olmadığı* ya da –ki en mantıklı seçenek budur– düşüncemin bütün mümkün nesnelerinden oluşan alanın bir sistem veya bir küme olmadığı sonucuna varmamız gerekir. Fakat bu ikinci durumda sonsuz bir sistemin varlığının ispatına dayanak olamaz.

- 4.28 Şimdi daha matematiksel şekilde akıl yürütelim. Bütün kümelerin kümesinin var olduğunu farz edelim (bu da zorunlu olarak düşüncemin bütün mümkün nesnelerinin alanının *küme olarak* var olduğu anlamına gelir). Bu durumda, bir küme olduğu için bu kümede ortak bir özelliğe sahip bütün elemanları var olan bir küme olarak ayrabiliriz (Zermelo’nun aksiyomu, bkz. 2.12). Özelliği “kendisinin elemanı olmama” olarak seçelim. Bu kez ayırma yoluyla, yani halihazırda gereken varo-

luş teminatıyla, var olduğu varsayılan bütün kümelerin kümesinde, kendilerinin elemanı olmayan bütün kümelerin kümesini “keselim”. Bundan dolayı söz konusu küme vardır, fakat Russel’in paradoksu bunun imkânsız olduğunu göstermiştir (kendi elemanı olmayan bütün kümelerin kümesinin var olduğunu ileri sürmek doğrudan formel bir çelişkiye götürür, bkz. 2.11). Dolayısıyla bütün kümelerin kümesinin var olması ve *a fortiori* bütün mümkün düşüncelerimin alanının bir küme olması imkânsızdır.

- 4.29 Dedekind’in girişimi nihayetinde Frege’nin girişiminin başarısız olduğu yerde başarısız olur: kavramdan varoluş savına geçişte. Ayrıca meselenin temeli de aynıdır: Frege ve Dedekind “salt mantık” veya bizatihi düşünceden hareketle sadece sayının işlemsel kurallarını değil, düşünce için sayının varlığı gerçeğini çıkarsamaya çabalar. Oysa tıpkı boş küme veya sıfırda olduğu gibi, *sonsuz çıkarsanamaz*: Sonsuzun varlığına aksiyomatik olarak *karar verilir*; bu da, bu varlığı düşüncenin bir inşası olarak değil, Varlığın bir olgusu olarak aldığımızı kabul etmek anlamına gelir.

İster Frege gibi “aşağıdan”, saf eksiklik yanından, ister Dedekind gibi “yukarıdan”, sonsuz tarafından alalım, sayının sahası mantığın yöntemleriyle, sadece düşüncenin kendi üstündeki baskısıyla tespit edilemez. Varlığının saf ve basit *kabulü* zorunludur: Boş küme aksiyomu sıfırı temellendirir ve bundan hareketle sonlu kardinaller var olur. Sonsuz aksiyomu sonsuz ordinallerin varlığını temellendirir ve bundan sonlu ordinallerin varlığına dönülebilir. Sayıya dair düşünce

için modernlerin önündeki sorunlar bir *tümdengelimli çıkarım*la çözülemez; sadece bir *kararla* çözülebilir. Doğruluğu bakımından bu karara dayanak olan şey ne sezgiyle ne de kanıtla alakalıdır. Kararın, varlık olarak varlığın bize salık verdiği şeyle uyumuyla alakalıdır. Bir'in olmamasından [*l'un n'est pas*] hareketle, sıfır ve sonsuz için söylenebilecek sadece şudur: Sıfır ve sonsuz vardır [*ils sont*].

4.30 Bununla birlikte üç çok önemli fikir için Dedekind'in hakkını teslim etmek lazım.

Birincisi, düşünce için sayıya yönelik doğru yaklaşımın, salt çokluğa dair genel bir teori, dolayısıyla küme teorisi olduğudur. Ontolojik türdeki bu yol, Frege'deki gibi kavramsal veya mantıkçı yoldan her bakımdan üstündür.

İkincisi, bu çerçevede ordinal yöntemle ilerlemek, düşüncede sayının *yakalanacağı* bir tür evrensel seri inşa etmek gerekir. Kuşkusuz ordinaler teorisinin, sıra düzeni fikrine –Dedekind'de fazlasıyla mevcut olan– aşırı bağımlılığından kurtarılması gerekir. Zira Jacques-Alain Miller'e itirazımda olduğu gibi, sayının varlığının ileri sürdüğümüz sıralı güzergâhla bağlantılı olduğunu farz etmemiz için bir neden yok. Ordinal fikrini daha da ontolojikleştirmek, daha az işlemsel, daha az *salt* seri yapıli hale getirmek gerekir.

Dedekind'in üçüncü ve dâhiyane fikri, sayıya dair modern, Antik Yunan'dakinden farklı bir düşünce inşa etmek için sonsuzla *başlamak* gerektiğidir. Bu başlangıca bir varoluş ispatı biçimi vermeye çalışmanın nafile oluşu, başlangıç fikriyle ilgili olarak nihayetinde

önemsiz bir meseledir. Sonlu sayıyı, doğal tam sayıyı düşünmek için önce –içinde yaşadığımız çağın, sonsuzun sekülerleştirildiği çağ (sonsuzun sayılması bunun ilk örneğidir) olması bakımından varlığın tarihî [*historiale*] doğasını takip eden bir kararla– sonsuz sayıyı düşünmek ve var etmek gerektiğini anlamak tamamen kurucu bir harekettir.

Bu üç noktada Dedekind, düşüncemizin büyük yasalarının hâlâ yanlış anlaşılan babasının en yakın yoldaşı ve bazen de atasıdır: Cantor.

5. Peano

- 5.1 Peano'nun çalışması derinlik veya yenilik bakımından kesinlikle ne Frege'ninki ne de Dedekind'inkiyle karşılaştırılabilir. Başarısının nedeni daha ziyade simgelerin berraklaştırılması, mantık ile matematik arasında kurulan emin bağlantı ve uygun aksiyomları ayırt ve ifade etmedeki gerçek bir yetenektir. Kökenindeki meşhur "Peano aksiyomları"nı ele almadan sayıdan bahsetmek mümkün değildir; söz konusu aksiyomlar doğal tam sayılara formel giriş bakımından temel referans haline gelmiştir.
- 5.2. Leziz bir şekilde Latince yazılmış *Principes d'arithmétique*'in²³ başından itibaren Peano "matematiğin temelleriyle alakalı meseleler"den bahsediyor ve bunların "tatmin edici bir çözüme" kavuşmadığını söylüyor olsa da, seçtiği yönelim kurucu bir tefekkürden ziyade, kullanıma dair bir tür uzlaşım kurmayı hedefleyen prosedürlerin teknikleştirilmesidir (ayrıca bunda çok başarılı da olur). "Güçlüklerin ana kaynağı dilin muğlaklığıdır" cümlesi bu anlamdadır. Peano'nun çalışmasının meselesi, sayıyı kuşkusuz yapay, ama okunabilir ve kesin bir dilin berraklığında açıklamaktır.

23 Peano için başvuru metni 1889 yılında Latince yayımlanmış bir metindir. Metnin başlığı "Aritmetiğin İlkeleri" şeklinde tercüme edilebilir. Bu metnin İngilizce çevirisi için, bkz. J. Van Heijenoort (ed.), *From Frege to Gödel, a.g.e.*, s. 83-97.

5.3 İçerikteyse yaklaşımı Dedekind'inkiyle aynıdır. Bir ilk terimden “hareket edilir” ve bu terim sıfır değil, Dedekind'deki gibi birdir. Ardışıklık fonksiyonu “işe koşulur” (Peano'da bu fonksiyon toplama işlemine dair sezgiye dayanarak gösterilir: n 'nin ardılı $n + 1$ olarak yazılır). Burada sırtımızı büyük ölçüde tümevarıma veya yinelemeyle akıl yürütmeye yaslarız. Fakat bir küme teorisi çerçevesinde çalışan Dedekind bu prosedürün geçerliliğini *tümdengelimle* çıkarırken Peano'da bu sadece bir aksiyom olarak ele alınır. Aşağıdaki şekilde bir karara varılır:

- 1, bir özellik taşıyorsa,
- ve n bir özellik taşıdığında $n + 1$ de aynı özelliği taşıyorsa,
- *bütün* n sayıları o özelliğe sahiptir.

Bu tümevarım ilkesiyle ve sunuluş tarzını netleştirdiği salt mantıksal aksiyomlarla donanmış Peano böylelikle tam sayılar alanının klasik bütün yapılarını *tanımlayabilir*: tam sıralılık ve cebirsel işlemler (toplama, çarpma).

5.4 Tümevarım veya yineleme aksiyomu, çok temel olan sonsuz konusunda Peano ile Dedekind'in düşüncesi arasındaki farkı ortaya çıkarır. Basit bir işlemsel ilke olarak ele alınan yineleme, gerçekte *sonsuzluğundan söz etmeden* sonsuz bir bütünde yasa yapmaya olanak verir.

Sonsuz sayıda tam sayı olduğu açıktır. Dolayısıyla “bütün” bu sayılardan söz etmek, fiili bir sonsuzdan bahsetmek anlamına gelir. Fakat Peano'nun aksiyomatik düzenğinde bu sonsuz, sonsuz olarak takdim

edilmemiştir. Yineleme aksiyomu, bir *doğrulama* (1 belirli bir özelliği taşır) ve zımni bir *ispattan* (n bu özelliği taşıyorsa, o halde $n + 1$ de taşır) hareketle, “bütün” kelimesinin kapsamı üzerine düşünmeye gerek kalmadan “bütün sayılar bu özelliği taşır” sonucuna varmaya olanak verir. Evrensel niceleyici burada fiilî bir sonsuza dair düşünceyi maskeler: Sonsuz, düşünce de verilmeden niceleyiciye kaydedilmiş gizil bir biçim olarak kalır.

Böylelikle Peano fiilî sonsuz üzerindeki eski yasağı (varlığa dair modern buyruk lağvetmeye çağırsa da hâlâ düşüncemizi tehdit eden bir yasadır) ihlal etmeden sayı kavramını takdim eder. Peano’nun aksiyomatiği sonsuzu veya sonsuzdan açık bir şekilde bahsetmeyi *savuşturur*.

Dedekind içinse tersine, sonsuzun sadece kavramı değil, varlığı da tümüyle hayati önemdedir. Dedekind Keferstein’a bir mektupta açıkça bunu yazar:

Analizimde soyut türü N sayı dizisi olan basitçe sonsuz bir sistemin temel doğası tespit edildikten sonra, böyle bir sistemin fikirlerimizin krallığında *var* olup olmadığı sorusu ortaya çıkar. Bu hususun mantıksal bir ispatı olmadığında böyle bir sisteme dair nosyonun içsel çelişkiler barındırdığını düşünebiliriz. Bu tarz ispatlara işte bu nedenle ihtiyaç vardır.²⁴

5.5 Peano varoluş meselelerine girmez. Bir aksiyomlar sistemi, işlemsel düzenekleri kurala bağladığı anda, gere-

²⁴ Bu kısım Dedekind’in Keferstein’a yazdığı 1890 tarihli mektuptan alınmıştır. Mektubun İngilizce tercümesi için, *a.g.e.*, s. 98.

kirse bu sistemin *uyumluluğunu* sorgulayabileceğizdir; böyle sorgulanan şeyin varlığı üzerine spekülasyon yapmamız gerekmeyecektir. Frege ve Dedekind'de ortak olan (her ne kadar söz konusu olan, Husserl'in noematik eşleniği anlamında "zihinsel şeyler" olsa da) "şey" veya nesne sözcükleri Peano'nun çalışmasında ortadan kaybolur ve yerine göstergenin hüküm sürdüğü bir tür "post-modern" düzenek gelir. Örneğin şöyle yazar: "Göstergeleri kullanarak, her önerme sadece bu göstergelere başvurarak sabitlenecek şekilde, aritmetiğin ilkelerine dahil olan bütün fikirleri simgeledim." Dedekind ve Frege'nin örtük modeli felsefiyse ("kesin bilim olarak felsefe") Peano'nunki doğrudan cebirsel-dir: "Bu notasyonlarla her önermenin, biçimi ve kesinliği açısından cebirin denklemlerine imrenmesine gerek kalmaz (...) buradaki prosedürler tamamen denklemleri çözmek için kullanılanlara benzerdir."

Peano, aslında bir göstergeler ekonomisi olan bir "sayı ekonomisi" ileri sürer: Paradigması cebirsel olan, varoluş ve sonsuzluk sorularının eksiltildiği, şeffaflığı uzlaşım sal olan ve işlemsel etkililiği inkâr edilmeyen bir ekonomi. Böylelikle matematiği kadim felsefi dayanağından *çekip alan* ve bize sadece kodun açıklanmış olmasının önemli olduğu bir göstergeler grameri gibi sunan, bugüne kadar galip gelmiş o düşünce hareketine katılır. Peano sayının varlığına dair her türlü düşüncüyü ve varlık olarak sayı düşüncesini ortadan kaldırarak, (ampirik dillere karşıt olarak) "formel bir dil" gibi ele alman matematiği bir bilime değil (çünkü bu kavrayışta her bilimin bir "nesnesi" olmalıdır), bilimlerin sözdizimine indirgeyen Carnap'ın olağanüstü tezlerine

giden yolu hazırlar. Peano aslında 19. yüzyıl sonunda oluşturulmuş olan ve Platonculuğu ezelden beri kalesi olmuş olan o yerde, yani matematikte ve özel olarak da Sayı İdeası'nda tahrip etmeyi amaçlayan çağımız düşüncesinin genel hattına kaydolur.

- 5.6 Burada, Lyotard'ın Batı felsefesinin “dilsel dönemeci” olarak adlandırdığı, benimse büyük modern sofistliğin hükümdarlığı diye adlandırdığım şeyin (doğum sancılılarıyla birlikte) gerçek kökenini kavırıyoruz: Salt düşüncenin en yüksek ifadesi olan matematiğin nihai analizde sadece sözdizimsel bir düzenek, göstergeler grameri olduğu doğruysa, her düşünce *a fortiori* dilin kurucu yasasına tabidir.

Platon için, örneğin *Kratylos*'ta ele aldığı gibi, dilin “şeylerin kendileri”ne tabi olmasının kesinlik ufkunun, *mathème*'in ontolojik görevi olduğu kesindir. Gerçekte basit bir izle işaretlediğimiz sayı Platon'un düşündüğü gibi Varlık'ın bir biçimiye hiçbir şey göstergelerin saf imparatorluğunu destekleyemez. Tersine, şayet sayı düşüncede temeli olmayan aksiyomlarla düzenlenen özel bir göstergeler gramerinden ibaretse felsefe öncelikle, her şeyden önce (Deleuze'ün Nietzsche'de teşhisine dair okumasında olduğu gibi) göstergelerin gücüne dair bir düşünce olmalıdır. Ya hakikat ya da göstergenin keyfiliği ve sözdizimsel oyunların çeşitliliği: Çağdaş felsefenin önündeki asıl tercih budur. Sayı bu çatışmada stratejik bir konumu işgal eder, çünkü aynı anda hem düşüncenin hatları en belirgin şekilde çizilmiş kaidesidir hem de varlığına dair soruyu en keskin şekilde çağıran şeydir.

Peano'nun düşünce açısından yoksul, sonuçları açısından kuvvetli aksiyomatığı, sayıya boyun eğdiren bir gramer olan, işlemsel bir uzlaşımı örgütleyen, göstergelerin sonluluğunda sonsuzun usta aracısı olan bu aksiyomatik, modern sofistliğe kendisini faydalı bir artefakt olarak sunar.

- 5.7 Her salt aksiyomatik prosedür, aksiyomların *kullanımının* kodlanması dışında düşüncede başka bir sunumu olmayan *tanımlanmamış* göstergeler getirir. Peano bu “ilkel” göstergeler konusunda pek tasarruflu değildir: Nitekim bunlardan dört tane vardır (küme teorisinin bizatihi sunuma işaret eden sadece tek bir ilkel göstergeye, $\in$, yani ait olma göstergesine başvurduğunu hatırlatayım):

Aritmetiğin göstergeleri arasında, aritmetiğin diğer göstergelerini mantığın göstergeleriyle birlikte kullanarak ifade edebileceğimiz göstergeler, tanımlayabileceğimiz fikirleri temsil eder. Böylelikle dördü hariç tüm göstergeleri tanımladım (...). Şayet düşündüğüm gibi bu dört gösterge daha fazla indirgenemiyorsa, bunların ifade ettikleri fikirleri önceden bilindiği varsayılan fikirler aracılığıyla tanımlamak imkânsızdır.

Bu indirgenemeyen dört gösterge:

- 1) “Sayıyı (pozitif tam sayı) ifade eden” N göstergesi.
- 2) “Birimi ifade eden” 1 göstergesi.
- 3) “ a ’nın ardılını ifade eden” $a + 1$ göstergesi.
- 4) “eşittir”i ifade eden $=$ göstergesi.

Dolayısıyla Peano sayı, ardışıklık ve 1'e dair her türlü tanımdan açıkça vazgeçer. (= göstergesi ayrı ele alınabilir: Burada aritmetiğin değil, mantığın bir göstergesi söz konusudur. Bizzat Peano şöyle yazar: "Mantığın bir göstergesi biçiminde olsa bile bu göstergeyi yeni olarak düşünüyoruz.") Kuşkusuz işlemsel şeffaflık uğruna ödenmesi gereken kefarettir bu. Frege'nin "sıfır bir sayıdır" şeklindeki devrimci önermeyi *anlamaya* çalışmak için bütün düşünceyi sıra düzenine soktuğu noktada Peano sadece şunu belirtir (bu, sisteminin ilk aksiyomudur): $1 \in \mathbb{N}$; tanımlanmamış iki gösterge arasında, 1'in bir sayı olduğunu "gösteren" (fakat hangi anlamlandırma [signification] doktrinine göre?) formel bir korelasyon. Dedekind'in sayının yerini, birebir ve örten bir fonksiyonun tatbik uzamı veya gerçekten var olan sonsuz zincir olarak ürettiği noktada Peano şöyle belirtir: $a \in \mathbb{N} \rightarrow a + 1 \in \mathbb{N}$, tanımlanmamış üç göstergeyi kullanan ve a bir sayıysa ardılının da bir sayı olduğunu "gösteren" bir içerim. Harfin gücü burada anlamlandırma pahasıdır. Ayrıca bu etki bir anlaşılmazlık etkisi değil, daha ziyade aşırı bir saydamlık, izin hantal hafifliğinin etkisidir.

- 5.8 Şiirde anlaşılmazlık, dilin sınırlarında gösterenin deşilip açılmasının harfi saçmasından doğar. Peano'nun salt aksiyomatığında anlamın geri çekilmesi, harfin gücünün kendisi üzerinde toplanmasından ve düşüncenin anlama sadece *dışarıdan* gelmesinden kaynaklanır. Peano varlığın yıldızımsı figürü olan ("ilgisizlikten ve kullanılmamaktan dolayı soğumuş, bir Takımyıldız") sayının kaçınılmaz olarak eksikliğini uyandırdığı ve Frege veya Dedekind'in umutsuzca ya sıfırı ya da son-

suzu Mevcudiyete getirme girişiminde bilinçdışı olarak etkisini muhafaza ettiği gizil şiirle her türlü yüzleşmeden sakınmak ister.

- 5.9 Peano'nun aksiyomatiği sayıda sadece bir işlemler ağını, göstergenin işlenebilir bir mantığını gören çağımızın temayülünün parlak bir başarısıdır. Peano'nun yeniden ele aldığı haliyle sayı, göstergeye doğru *işaret eder* [*fait signe vers le signe*] veya göstergelerin Göstergesidir.

Bu bakış açısından Peano bilim evreninin varlığın unutuluşuyla zirveye vardığı fikrine, sayısallığın teknik iradenin düşünülmeğinde soğurulması fikrine katılır. Burada sayı tamamen *makinevaridir*. Bu nedenle Peano'nun aksiyomatiğinin başarısının, her türlü ontolojiyle bağlarını kopararak ve sadece dilin kaynaklarına yerleştirerek *mathème*'i modern sofistliğe *teslim eden* bu büyük harekete katıldığı savunulabilir.

- 5.10 Peano'nun sayı kavramını indirgediği göstergeler gramerinin semantik sınırlarının, önce Skolem daha sonra Robinson²⁵ tarafından keşfedilmesi bu operasyondan alman büyük bir intikam olmuştu. Günümüzde böyle bir aksiyomatiğin, özü doğal tam sayıya dair fikir kapsamında sezdiğimiz her şeyden çok farklı olan

25 Bu meseleler hakkında bkz. A. Robinson, *Non-standard analysis*, 10. bölüm (tamamen tarihle ilgilidir), North-Holland Publishing Company, gözden geçirilmiş baskı, 1974. Robinson "Skolem'in aritmetiğin standart-dışı modelleri üzerine çalışmalarının standart-dışı analizin yaratımında en önemli faktör" olduğunu teslim eder (s. 278).

Bu gelişmelere dair felsefi bir görüş için, bkz. A. Badiou, "La subversion infinitésimale", *Cahiers pour l'analyse*, no. 9, Paris, Seuil, Yaz 1968.

“standart dışı” modellere imkân verdiğini biliyoruz. Peano’nun sistemi “sonsuzca büyük” sayıların var olduğu modellere veya sonsuzluk türü sayılabilir olanı aşan modellere olanak verir. Peano’nun aritmetiği “patolojik” yorumlara elverişlidir, göstergeler makinevariliğinde tekanlamlı bir düşünce oluşturmaya muktedir değildir. Mathème’i sırf bir göstergeler sözdiziminin uzamsallaştırılmış aşikârlığına indirgeme yönündeki her teşebbüs, çokluğun biçimleri olarak varlığın karanlık savurganlığında karaya oturur.

- 5.11 Sayının özü ne saymanın ve saymanın kurallarının basit gücü olarak ne de yazılı biçimlerin saltanatı olarak dile getirilmeye izin verir. Bu öze, varlığı üzerine tefekkür ederek varmak zorunludur.

N, “tanımlanmamış” bir yüklem değil, boşluğun (veya sıfırın) ardından gelenin tatbikinin sonsuz yeridir, ardıl olmakta ısrar ettiği o yere vurulan varoluşsal mühürdür.

“Başlayan” şey, “birimin” opak göstergesi olarak 1 değil, her dilin, dili olduğu durumun varlığına dikilmesi olarak sıfırdır.

Ardışıklık bir +1’in toplamsal kodlanması değil, bir şeyin ardından geliyor olmaktan ziyade ardıllar olan belirli sayıların tekil temayülüdür ve bu sayılar varlıklarında bu temayülle damgalanmıştır. Ayrıca sıfır ve sonsuzun tam da bir şeyin *ardından gelmeyen şeyler* olduğunu bilmek zaruridir; her ikisi de bir Hiçliğin komşuları olsalar da varlıklarında, farklı şekilde, ardıl değildirler.

Sayı ne sayan şeydir, ne de saymakta kullandığımız şey. Sayısallığın bu saltanatı sayının unutuluşunu örgütler. Sayıyı *düşünmek*, bir tersine çevirmeyi gerektirir: Varlığın akıl sır ermez bir biçimi olduğu için sayı, bize sayma denilen kestiriminin çelimsiz bir biçimini buyurur. Peano *bizim* zaafımız, sonluluğumuz olan sayının kaydını onun varlığının koşulu olarak sunar. Fakat Sayının krallığında, Peano'nun aritmetiğinin düşünmeye olanak verdiğinden çok daha fazla şey, sonsuzca daha fazla varlık vardır.

6. Cantor: “iyi sıralılık” ve ordınaller

- 6.1 Sayısalılığın genel ontolojik ufkunu ordınaller temsil eder. Birazdan girişeceğımız ordinal kavramının aydınlatılmasından sonra bu ilke söyleyeceğımız her şeyde hâkim olacak; bu anlamda Cantor’un sayıya dair çağdaş düşüncenin hakiki kurucusu olduğı doğrudur. Cantor’un²⁶ kendisi de ordınaller teorisinin, keşfinin kalbinde yattığını düşünüyordu. Günümüzde, kümelerin ve sayıların *var olmasıyla* yetinen ve bunların ne *olduğıyla* hiç ilgilenmeyen *working mathematician*,²⁷ ordınalleri daha ziyade bir garabet olarak görür. Bu hafif küçümsemede, sadece *çalıştığı* [*working*] sürece matematikçinin toplumsal sayısalılık buyruklarına itaat biçimlerinden birini görmek gerekir. Kuşkusuz matematiksel mantık veya küme teorisi uzmanları bunun is-

26 Cantor’un sayılara dair ordinal anlayışının en açık ifadesi Dedekind’e yazdığı 1899 tarihli bir mektupta yer almaktadır. Bu mektubun İngilizceye tercüme edilmiş önemli kısımları için, bkz. Van Heijenoort, *From Frege to Gödel, a.g.e.*, s. 113-117. Cantor tutarlı çokluklar ile tutarsız çokluklar arasında felsefi bakımdan temel önemdeki ayrım konusunda fevkalade bir vuzuh sergiler. Ayrıca bu terminolojiyi ona borçluyuz.

27 *Working mathematician*: Matematiğın felsefi ve kurucu meseleleriyle ilgilenmeyen matematikçiler.—çn

tisnasıdır ve çoğunlukla kendileri bu istisna dolayısıyla hayıflanırlar: Çünkü kerhen Varlığın ihtarına en yakın olanlardır ve onlara göre ordinailler temeldir.

6.2 Dedekind'den bahsederken kendi felsefi yorumumuzda ordinaillerin mümkün olduğunca eksiksiz bir "ontolojikleştirilmesi"ni benimsememiz gerektiğini söylemiştim. Doğrusu, bu kavramın Dedekind veya Cantor tarafından sunulduğu, kavramı özünde sayıya dair seri yapılı veya işlemsel basit bir sezgiye hâlâ çok yakın olan iyi sıralılık nosyonu ile ilişkilendirir.

6.3 Okula gitmiş herkes, iki farklı tam sayı verildiğinde birinin daha büyük, diğerinin daha küçük olduğunu bilir. Ayrıca bir sayılar "yığını" önüne konulduğunda bu yığında sadece ve sadece tek bir tanesinin en küçük sayı olduğunu da bilir.

Genel özellikleri ayrıştırıldığında bu seri yapısına dair bilgi, iyi sıralı küme kavramına mahal verir.

6.4 "İyi sıralı" bir kümede:

1) kümenin elemanları arasında bir *tam sıralılık* ilişkisi vardır: e ve e' adlı iki elemanımız varsa ve $<$ işareti sıra ilişkisini gösteriyorsa, ya $e < e'$ ya da $e' < e$ veya $e = e'$ olacaktır; bu ilişkiyle "kıyaslanamayacak" iki eleman yoktur;

2) bu şekilde sıralanmış kümenin boş olmayan herhangi bir parçası verildiğinde, bu parçanın bir *en küçük elemanı* vardır (söz konusu parçanın tüm diğerlerinden daha küçük olan bir elemanı). Söz konusu parça P olarak adlandırılırsa, P 'ye ait öyle bir p vardır ki P 'ye ait

olan tüm diğeer p' elemanları için $p < p'$ olur. Bu p elemanı P 'nin minimal elemanı olarak adlandırılacak.

Bir P parçası için p minimal elemansa bu özelliğı taşıyan *tek* eleman odur. Zira bu özelliğı sahip p' adlı başka bir eleman daha olsaydı, tam sıralılık olduğı için p' elemanı p elemanından farklı olacaktır ve bu durumda ya $p < p'$ olacaktır ve bu durumda p' minimal eleman olmaz, ya da $p' < p$ olacaktır ve bu durumda da p minimal eleman olmaz. Dolayısıyla iyi sıralanmış bir kümenin P parçasının “minimal elemanı”ndan hiç çekinmeden söz edebiliriz.

Bu genel iyi sıralı küme kavramının, okuldaki öğrencinin en tanıdık sayılar olan doğal tam sayılarda gözlemlediğinin bir tür dışdeğerlemesi [*extrapolation*] olduğı görülüyor.

- 6.5 İyi sıralı bir kümeye dair güzel bir örnek verebiliriz. E iyi sıralı bir küme olsun. E kümesinin 2. koşula göre var olan en küçük elemanıyla “başlarsınız”. Bu elemanı 1 diye adlandırın. E'nin 1 çıkarılarak elde edilen parçasını düşünün: $(E - 1)$ parçası. Bu kümenin *hemen 1'in ardından gelen* bir minimal elemanı vardır. Bu elemanı 2 olarak adlandırın. E'nin, 1 ve 2 çıkarılarak elde edilen parçasını düşünün: $(E - (1,2))$ parçası. Bunun da bir minimal elemanı vardır ve 3 olarak adlandırılabilir, vs. İyi sıralı bir küme bir zincir gibi görünür; zincirin her bir halkasını, tamamen belirlenmiş başka bir halka (bu, geriye kalan parçanın minimal elemanıdır) takip eder (“takip eder” ifadesi, tam sıralılık ilişkisinde hemen sonra gelir anlamında kullanılmaktadır).

6.6 Cantor'un dehası²⁸ bu örneği sonluyla sınırlamamak ve sonsuz numaralandırmaları takdim etmektir. Şöyle bir fikir ortaya atar: İyi sıralı “birinci” küme ve tüm diğer kümelerin matrisi olan $1, 2, 3, \dots, n, n + 1, \dots$ dizisinin, yani tam sayılar dizisinin ötesinde “sonsuz bir ordinal sayı”nın, ω 'nin var olduğunu farz edersem ve bu sayının ondan önce gelen tüm sayılardan daha büyük olduğunu ilan edersem *devam etmemi* ne engelleyebilir ki? Pekâlâ ω 'ye, bir şekilde bütün tam sayılar kümesinden *sonra* gelecek iyi sıralı bir kümenin minimal elemanı gibi davranabilirim. Böylelikle $\omega + 1, \omega + 2, \dots, \omega + n, \dots$, vs. “sayılarını” tasavvur edebilirim. Sonunda $\omega + \omega$ sayısına varırım ve tekrar devam edebilirim. Hiçbir durma noktası buyurulmaz ve böylelikle her bir terimi, var olan her dizinin mümkün ölçüsü olan bir tür toplam seri elde ederim. Gerçekte bu terim *kendinden önce ne kadar olduğunu* belirtir, aynı uzunluktaki her seriyi *sayar*.

6.7 İyi sıralı bir kümenin, minimal elemanından “sonu”na kadar uzunluğunun ölçümünü *ordinal* olarak adlandırdığım söylenebilir. O halde ordinallerin “toplam” dizisi bu uzunlukların ölçümü için bana bir ölçek sağlayacaktır. Her ordinal, elemanların birbirini takip etme yöntemi tarafından ve bu elemanların toplam sayısı tarafından belirlenen olanaklı bir iyi sıralılık yapısını temsil edecektir. İster sonlu olsun (ω 'den önce gelen ve doğal tam sayılar olan ordinaller) ister sonsuz ol-

28 Bu konu üzerine Alexandre Koyré'nin çalışmalarına başvurulabilir.

sun (ω 'den sonra gelen ordinaller) bir ordinalin bir "iyi sıralılık türü"nü numaralandırdığını söylememizin nedeni budur.

- 6.8 Bu fikre teknik bir temel sağlamak için, aralarından birine izomorf olan (dolayısıyla aralarında izomorf olan) iyi sıralı kümeler sınıfını düşünelim. Bundan ne anlamak gerekiyor?

İyi sıralı iki küme, E ve E' kümelerini alalım. $<$ göstergesi E üzerindeki sıra ilişkisi, $<'$ ise E' üzerindeki sıra ilişkisi olsun. E kümesinde $e_1 < e_2$ olduğunda E' kümesinde $f(e_1) <' f(e_2)$ olacak şekilde, E ile E' kümesi arasında birebir ve örten bir f eşlemesi (bkz. 4.5) varsa E ile E' kümelerinin izomorf olduğunu söyleyeceğim.

f 'nin E sıra düzenini E' sıra düzenine yansıttığını ve ayrıca f birebir ve örten olduğu için E' kümesinde E kümesindeki "kadar" eleman olduğunu görüyoruz. Dolayısıyla sadece iyi sıralılıkları açısından ve elemanlarının tekillikleri soyutlandığında E ve E' kümelerinin özdeş olduğunu söyleyebiliriz: f eşlemesinin garanti ettiği üzere, iyi sıralılıklarının "morfizmi" (biçimi) "izo"-dur (aynıdır).

Aralarında izomorf olan iyi sıralı her küme sınıfı aslında *bir* iyi sıralılığı, sınıfın kümelerinde ortak olan bir iyi sıralılığı temsil eder. Bir ordinalle temsil edilecek olan *bu* iyi sıralılıktır.

Dolayısıyla bir ordinal, söz konusu biçimin yapılandırdığı tüm kümelerle izomorf olan iyi sıralılığın olanaklı bir figürünün (bir biçimin, bir morfizmin) işaretidir. Bir ordinal *bir iyi sıralılığın sayısı veya rakamıdır*.

6.9 Her sayı için, iyi sıralılık biçimlerinin evrensel bir ölçüm ölçeği biçiminde, bir varlık *ufkunun* belirlenmesi konusunda halihazırda çok gelişmiş olan bu kavrayış, yine de bir kısmı teknik, bir kısmı felsefi olan ciddi zorluklar getirir. .

6.10 Teknik zorluklar üç tanedir. Yanıtlamamız gereken üç soru vardır:

1) Ordinallerin toplam serisinin *birinci* terimi, bütün zinciri “tutan” ilk halka nedir? Bu, sıfır uzunluktaki dizileri, elemansız dizileri, *hiçbir şeyi* sıraya sokmayan iyi sıralılığı saymaya uygun yegâne unsur olan sıfıra veya boş kümeye dair sorudur. Frege’nin takıldığı sorudur bu.

2) Sonlu tam sayılar dizisinin bir ötesi olduğunu ortaya atmamıza izin veren düşünce prosedürü tam olarak nedir? Sonluyu *aşmamızı* ve doğal tam sayı olmayan ilk ordinal, sonlu olmayan bir kümeyi yapılandıran bir iyi sıralılığın ilk işareti olan ω ’yi tespit etmemizi sağlayan hareket nedir? Bu, sonsuza dair varoluşsal soru, Dedekind’in takıldığı sorudur.

3) Ordinallerin evrensel serisi, ister sonlu ister sonsuz her uzunluğun ölçüm ölçeği, iyi sıralılık işaretlerinin toplamı, küme teorisi çerçevesinde *var mıdır*? Dedekind’in dahil ettiği “düşüncemin bütün olanaklı nesnelerinin sistemi” gibi, bu da düşüncenin mümkün nesnelerinden biri olarak *alamayacağı tutarsız* bir bütün değil midir? Bu, “mutlak” bir bütünün bir-olarak-sayılmasının olanaklılığına dair sorudur. Dolayısıyla söylem evrenini “sayma” iddiasını ortaya attığımız anda Bir’in çekilmesi sorunudur.

İşte böylelikle sayıya dair modern düşüncenin üç sorununa geri dönmüş buluruz kendimizi: sıfır, sonsuz ve Bir'in varlık-olmayışı.

- 6.11 Üçüncü sorunun pozitif bir çözümü olmadığı hemen ortaya çıkar. Geçmişte bir paradoks, Burali-Forti paradoksu olarak ifade edilen şeyi, yani ordinallerin *bir küme oluşturmadığı*, bir olarak sayılabilecek bir çoklukta bir araya getirilemeyeceklerini aslında *ispatlayabiliriz*. “Bütün” ordinaller fikri tutarsız, imkânsızdır, bu bakımdan sayının varlık ufkunun gerçeğidir.

Söz konusu ispat Dedekind'in sonsuz bir kümenin varlığını kanıtlama yöntemini çürüten ispata çok yakındır (bkz. 4.28): “Bütün” ordinaller kümesinin kendisi bir ordinal olmalıdır ve dolayısıyla aynı zamanda hem kendisi *içinde* (çünkü *bütün* ordinallerin kümesidir) hem de kendisi *dışındadır* (çünkü bütünleştirdiği dizide sayılmaz). Dolayısıyla hiçbir sınırlama getirmeden bir “ordinaller kümesi”nden söz etmek yasaktır. Bu da şöyle demeye gelir: “Bir ordinal olmak”, *kaplamı olmayan* bir özelliktir. Belirli bir nesnenin bir ordinal olduğu (özellği taşıdığı) *doğrulanabilir*, fakat bu özelliğe sahip bütün nesneler *bir-olarak-sayılmaz*.

- 6.12 Frege ve Dedekind'e dair eleştirimde 1 ve 2 numaralı sorunların ele almışını tasavvur etmeye yetecek kadar şey söyledim: Sıfırın veya boş kümenin varlığı ve sonsuz bir kümenin varlığı hiçbir şekilde “salt mantıksal” varsayımlardan çıkarsanamaz. Bunlar, varlığın tarihî buyruğunun kısıtları altında alınmış aksiyomatik kararlardır. Modern düşünce dünyası, bu buyruğun bir

sonucundan ibarettir. Rönesans'tan itibaren ve Yunan kozmosuyla²⁹ kopuş içinde, ontolojik gereksinime dair ön-kavrayışımızla uyumlu ne varsa düşünebilmek amacıyla aşağıdakileri kabul etmek zorunlu hale gelmiştir:

- her “olan” [*étante*] durumun kendi varlığına dikilme tarzı, kendi sınırında kendisini ileri süren şeyin açılması, Mevcudiyet, değil, saf eksiltme, nitelendirilemez boşluktur; sayı denen varlık biçiminde bu şöyle ifade edilir: “Sıfır vardır” veya Cantor’un ontolojik yaratımıyla daha uyumlu bir üslupla: “Hiçbir elemanı olmayan bir küme vardır”;

- yarı-bütünlüğünde, ve bu niteliği yalnızca Tanrı’ya ayıran ortaçağ geleneğiyle kopuş içinde, olan-durumlar sonsuzdur; öyle ki gücü kutsalın gücü olan bir yüklem olmak şöyle dursun, sonsuz, bir bir-olarak-sayma yasası uyarınca saf çokluk olarak savurganlığında varlığın *banal* bir belirlenimidir. Sayı denen varlık biçiminde bu şöyle ifade edilir: “Sonsuz bir küme vardır” veya daha teknik ifadesiyle: “Bir doğal tam sayı olmayan bir ordinal vardır” ya da “ ω vardır”.

6.13 Düşüncede üç yüz yıldır kullanılıyor olmalarına rağmen sıfır ve sonsuzla ilgili kararların birer karar olarak (boş küme aksiyomu ve sonsuz aksiyomu adlarıyla) kabul edilmesi için geçen yüzyılın başına kadar beklemek gerekti. Gelgelelim şaşırtıcı değildir bu. Ya sonluluk temasının ihmal edilişinde ya da Mevcudiyet’in Antik Yunan’daki zeminine duyulan nostaljide bu zo-

29 Bu konu üzerine Alexandre Koyré’nin çalışmalarına başvurulabilir.

runluluklara dönmeye yönelik gerçek bir *felsefi* inat gözlemlenebilir. Burada, öylece karar verilmiş saf beyanlar söz konusu olduğu için, bunların tarihselliklerinin zayıflığını taşıdıkları doğrudur. Hiçbir *argüman* bunları savunamaz. Ayrıca bazı hakikat prosedürleri, özel olarak siyaset, sanat ve aşk hâlâ böyle aksiyomların standardına ulaşamamıştır ve dolayısıyla birçok bakımdan *Yunan kalmıştır*. Bunlar Bir'in köhne haklarını ileri sürmek için "sıfır, varlığın sayısal özel adıdır" önermesini sürekli reddederek Mevcudiyete sımsıkı tutunurlar (sanat ve aşk). Ya da zorunlulukların zayıflamış otoritesini kullanmak için, günbegün "durum sonsuzdur" önermesini kemirerek sonluluğu yönetirler (siyaset).

- 6.14 Boşluk ve sonsuzluk aksiyomları bütün sayı düşüncesini imar eder. Saf boşluk, sayının *olmasına* dayanak olan şeydir; sonsuz, sayının *her* duruma dair düşüncenin ölçüsü olduğunu öne sürmeye olanak veren şeydir. Teoremler değil de aksiyomların söz konusu olması, sıfır ve sonsuzun varoluşunun varlık tarafından –düşüncenin böyle bir varoluşun *ontolojik çağında* var olabilmesi için– düşünceye buyurulduğu anlamına gelir.

Bu bakımdan tepkisel, arkaik ve dinî iradelerin mevcut gücüne zorunlu olarak sayının dermansız opaklığı eşlik eder; varlığın çağa ait yasası böyle olduğu için, bize hükmetmeye devam eden sayı, bizim için düşünülemez hale gelir. Sayı, varlığın biçimi olarak var olacaktır, ama boşluk ve sonsuz bütününüyle sekülerleştirilmediği için, düşünce artık çağın kendisine buyurduğu biçim ve kuvvette var olamayacaktır. Bu durumda sayı, sınır tanımadan bir tiranlık olarak ortaya çıkacaktır.

6.15 Cantor'un ordinal kavramının ana felsefi güçlüğünden bahsedelim. Ordinal sayıları iyi sıralılık kavramına bağlayan sunum tarzında ordinal sayı teorisi, sayının varlığını *düşünmeye* olanak vermekten çok, doğal tam sayı sezgisini "genelleştiriyor" gibidir. Otoritesini, aydınlığa kavuşturmayı iddia ettiği şeyden alır. İyi sıralılık fikri aslında sayı kavramının kurucusu olmaktan ziyade, bunu sayısal dolaysızlığın eksik ve sonlu deneyiminden çıkarsar: Sempatik öğrenci figüründe bunu somutlaştırmıştım (6.3).

Şayet gerçekten sayının varlığını saf çokluğun biçimi olarak tesis etmek, okuldan çıkarmak (ki bu aynı zamanda kavramı onu çevreleyen sayısallıktan eksiltmektir) istiyorsak, işlemsel veya seri yapıdaki manipülasyonlardan uzaklaşmak gerekir. Peano'da bir hayli açık olan bu manipülasyonlar evcil sayılarımızın yarı duyulur imgesini (1'i takip eden ve 3'ten önce gelen 2, vs.) modern sonsuzun ekranı üzerine yansıtır. Hesap manipülasyonları ile düşünce arasında doğru mesafeyi oluşturmak tam da benim sayı kavramının ontolojikleştirilmesi dediğim şeydir. Vardığımız noktada bu daha kesin bir ödev biçimini alır: ordinallerin "evrensel" serisinin ontolojikleştirilmesi. Buraya varmak için iyi sıralılık fikrini terk etmek ve sıralamayı, ordinalliği içkin bir şekilde düşünmemiz gerekiyor.

Sayı kavramı, kendisini düşünceye sıra düzeninin veya düzensizliğin ölçüsü olarak sunmaz. Biz sayının varlığının içkin bir belirlenimini talep ediyoruz. Bizim için soru şu şekildedir: Saf çokluğun, her türlü seri yapıda bir türetim dışında kavranabilir olan hangi yüklemi sayısallığı kurar? İstedığımız şey saymak değil, saymayı düşünmek.

2

Kavramlar

Doğal Çokluklar

7. Geçişli çokluklar

- 7.1 Sayı ile sıralılık veya seri arasındaki tüm *ilkel* bağlardan kurtulmayı sağlayan geçişli küme kavramıdır. Aslen ontolojik bir doğaya sahip olan bu yapısal işlemci, doğal varlığın figürü olarak sayının içkin bir belirlenimine tek başına olanak verir. Geçişlilik sayesinde artık kavramın çıkarsanması (Frege), seri üretmede eksikliğin nedenselliği olarak özne (Miller), sonsuzun varlığı (Dedekind) veya iyi sıralılığa dair “öğrenci” sezgisi (Cantor) sıkıntılarından uzağıdır.
- 7.2 İlk bakışta bu kavramın bir hayli gizemli olması ve her koşulda sayıya dair sezgisel fikirle hiçbir bağının olmaması benim gözümde bir meziyettir. Bu, sayının salt ve basit ön kabulünde tamamen şeffaf olan bir ontolojik açıklama döngüsünden çıkmayı sağlayacak şeyi söz konusu kavramda bulduğumuzu kanıtlar. Bu döngünün Frege’de olduğu gibi Dedekind’de de ortaya çıktığını ve Cantor’un iyi sıralılık türleri olarak ordinal sayılara dair kavrayışına gölge düşürdüğünü görmüştük. Ayrıca geçişlilik kavramının *felsefi düşünce için* meşruluğunun hiçbir kuşkuya yer bırakmadığını da göreceğiz.
- 7.3 Geçişli bir kümenin ne olduğunu anlamak için, bir elemanın bir kümeye *ait oluşu* ile bir parçanın küme tarafından *içerilmesi* arasındaki ayrımı iyice kavramak

gerekıyor; bu ayrımın Cantor sonrası bütün matematiksel düşüncenin dayanağı olduğunu söylemek abartılı olmayacaktır. Söz konusu ayrım okulda ilk öğrenilen bilgilerden biri olsa da o kadar derin sonuçlara sahiptir ki uzun zaman boyunca karanlıkta kalmıştır.

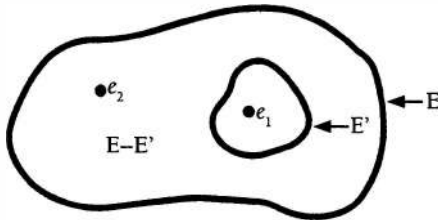
- 7.4 Bir küme “elemanlardan oluşur”, elemanlarının “bir araya getirilmesidir” (kendi ifademle, bir-olarak-sayılmasıdır).

E bir küme ve e bu kümeyi “oluşturan” elemanlardan biri olsun; bunu $e \in E$ şeklinde gösteririz ve e elemanının E 'ye ait olduğunu, $\in$ 'nin ait olma göstergesi olduğunu söyleriz.

Şayet E 'nin birden fazla elemanını “kümellerseniz”, bunlar E 'nin bir parçasını oluşturur. E' bu elemanların kümesi olsun; E' kümesi E kümesinin bir parçasıdır ve bu, $E' \subset E$ şeklinde gösterilir; E' kümesinin E kümesi tarafından içerildiğini, $\subset$ işaretinin içerilme göstergesi olduğunu söyleriz.

E kümesinin E' parçasının her elemanı, E kümesinin bir elemanıdır. Aslında bu tam da bir parçanın tanımıdır: E' parçasına *ait olan* bütün elemanlar aynı zamanda E kümesine de *aitse* E' parçası E tarafından *içerilir*. Burada içerilmenin, küme teorisinin tek “ilkel” göstergesi olan ait olmadan hareketle tanımlandığı görülebilir.

Genelde karşımıza çıkan (aldatıcı) imge şöyledir:'



Bu grafikte E' kümesinin E kümesinin bir parçası olduğunu, e_1 'in (E' parçasının bütün elemanları gibi) aynı zamanda hem E' hem de E kümesinin bir elemanı olduğunu ve e_2 'nin “bütün” E kümesinin bir elemanıyken E' parçasının bir elemanı olmadığını okuyabiliriz. Ayrıca e_2 'nin E ile E' kümelerinin farkına ait olduğu söylenir; bu fark $E - E'$ şeklinde ifade edilir.

- 7.5 E kümesine *ait olan* bir elemanın aynı zamanda bu kümenin bir parçası olması, bu küme tarafından *içerilmesi* mümkün müdür? Bir hayli tuhaf görünüyor; bilhassa yukarıdaki imgeye bağlı kalırsak. Gelgelelim bu tuhaflığın nedeni çok önemli bir hususu unutmaktan kaynaklanıyor: Bir kümenin bir elemanının kendisi de elbette bir küme olabilir (ve hatta daima öyledir). Sonuç olarak e , E kümesine aitse ve e bir kümeysse sorulması gereken soru, e 'nin bir elemanının aynı zamanda E kümesinin bir elemanı olup olmadığıdır. Şayet e 'nin bütün elemanları aynı zamanda E kümesinin de elemanlarıysa, bu durumda E kümesinin bir elemanı olan e aynı zamanda E kümesinin bir parçasıdır. E kümesine aittir ve E kümesi tarafından *içerilir*.
- 7.6 Örneğin V 'nin bütün canlı varlıklar kümesi olduğunu varsayalım. Kedim bu kümeye aittir. Fakat bir kedi aynı zamanda hücrelerden oluşur ve bunların hepsinin canlı varlıklar olduğunu ileri sürebilirsiniz. Dolayısıyla kedim aynı zamanda hem *bir* canlı varlık hem de canlı varlıklardan oluşan *bir kümedir*. V kümesine aittir (*bir* olarak, *o* canlı kedi olarak) ve V kümesinin bir parçasıdır – V kümesi tarafından *içerilir*– (canlı hücreler kümesi olarak).

7.7 Kedileri bir kenara bırakalım. Aşağıdaki üç “nesne”yi düşünelim:

- e_1 nesnesi;

- e_2 nesnesi;

- bu ilk iki nesnenin “kümelenmesi” olan ve (e_1, e_2) ile gösterilecek nesne. Bu, e_1 ve e_2 çifti olarak adlandırılır.

Bu üç nesnenin kümesini oluşturalım. Aynı şekilde bu kümeyi şöyle gösteririz: $(e_1, e_2, (e_1, e_2))$. Bu küme e_1 , e_2 ve (e_1, e_2) çiftinden oluşan üçlü olarak adlandırılır. Bu kümeyi T olarak adlandıralım. Bu T üçlüsüne ait olan üç elemanın e_1 , e_2 ve (e_1, e_2) olduğunu unutmayın.

e_1 ve e_2 T kümesine ait olduğu için bunları “kümelediğim” T kümesinin bir parçasını elde ederim. Dolayısıyla T kümesinin iki elemanının “kümelenmesi” olan (e_1, e_2) çifti, T kümesinde içerilir. Fakat ayrıca kümenin bir elemanı olduğunu, kümeye ait olduğunu da gördük. Böylelikle bir elemanı aynı zamanda bir parça olan basit bir küme örneği inşa etmiş olduk. T kümesi için (e_1, e_2) çifti aynı zamanda hem aidiyet hem de içirilme konumundadır.

7.8 Cantor’un çok önemli teoremi sayesinde herhangi bir E kümesinde parçaların elemanlardan daha fazla olduğunu biliyoruz. Bu benim içerilmenin aidiyet karşısında fazlalığı diye adlandırdığım şey: düşünce için sonuçları devasa olan, varlık olarak varlığın yasası. Devasa, çünkü Bir/Çokluk ve Bütün/Parçalar çiftlerini örgütleyen temel kategorilere temas eder. Dolayısıyla her parçanın bir eleman olması, içerilen her şeyin ait olması imkânsızdır: Mutlaka eleman olmayan parçalar vardır.

Fakat soruyu tersten de sorabiliriz: Bazı durumlarda (örneğin canlı varlıklardan oluşan V kümesi için kedimin veya T üçlümüz için (e_1, e_2) çifti) bir elemanın bir parça olmasının mümkün olduğunu gördüğümüze göre, *bütün* elemanların parça olması, ait olan her şeyin içerilmesi mümkün müdür? T için bu doğru değildir: Örneğin e_1 elemanı tek başına alındığında T 'nin bir parçası değildir.

Bütün elemanları parçalar olan, ampirik olmayan (zira V kümem, kedim ve hücrelerim rasyonel olarak kuşkuludur) bir küme örneği üretebilir miyiz?

- 7.9 Biraz boş kümeye geri dönelim. “Hiçbir elemanı olmayan bir küme vardır” aksiyomunu, yani hiçbir şeyin ait olmadığı bir kümeyi ortaya atmıştık (2.18). Çoklu-varlığın bütün yapısının “boş” kayası olan bu kümeye özel bir ad vereceğiz: “0”.

Şu çok incelikli notu düşmek zorunlu: *Boş küme her kümenin bir parçasıdır*; E ne olursa olsun 0 , E kümesinde içerilir. Neden mi? Çünkü şayet bir F kümesi E kümesinin bir parçası *değilse*, nedeni, F kümesinin E kümesinin elemanı olmayan elemanları olmasıdır (F kümesinin bütün elemanları E kümesinin elemanıysa, tanım gereği F , E kümesinin bir parçasıdır). Halbuki 0 'ın hiçbir elemanı yoktur. Dolayısıyla 0 'ın E kümesinin bir parçası *olmaması* imkânsızdır. Boş küme “evrensel olarak” içerilir, çünkü boş kümedeki hiçbir şey böyle bir içerilmeyi engelleyemez, reddedemez.

Başka türlü söylersek: F kümesinin E kümesinin bir parçası olmadığını ispatlamak için F kümesinde en azından bir elemanın farklı olması gerekir: E kümesi-

nin bir elemanı olmadığı için F kümesinin “bütünüyle” E kümesinde içerilmemesini sağlayacak bir eleman. Fakat boşluk bu tür hiçbir farklılığa müsaade etmez. Farksızdır/kayıtsızdır [*in-différent*] ve bu nedenle bütün çokluklarda içerilir.

7.10 Aşağıdaki iki “nesne”yi düşünelim:

- boş küme, $\emptyset$;
- tek elemanı boş küme olan küme; bu, boş kümenin *tekliği* [*singleton*] olarak adlandırılır ve $(\emptyset)$ ile gösterilir.

Bu ikinci nesnenin boş kümeden *farklı* olduğunu çok iyi kavramak gerekiyor. Nitekim boş kümenin *hiçbir* elemanı yokken tekliğin bir elemanı vardır: boş küme. Boşluğun tekliği, boşluğu “bir olarak sayar”, halbuki boş küme hiçbir şey saymaz (bu ise, “hiçbir şey saymama”, yani $\emptyset$ ile “hiçliği sayma”, yani $(\emptyset)$ arasında ince bir ayrıma götürür. Platon daha önce *Parmenides*’te bu ayrımla oynamıştır).

7.11 Teklik (özel olarak boşluğun tekliği değil, “genel olarak” teklik) hakkında ek bir açıklama.

E bir küme ve e , bu kümenin elemanlarından biri olsun ($e \in E$). e elemanının (e) şeklinde yazılan tekliği E kümesinin bir parçasıdır: $(e) \subset E$.

e elemanının tekliği aslında nedir? Tek elemanı e olan kümedir. Eğer e , E kümesinin bir elemanıysa (e) tekliğinin bütün elemanları, yani yegâne elemanı e , E kümesinin elemanıdır ve dolayısıyla (e) , E kümesinde içerilir.

7.12 İki nesnemizi, 0 ile gösterilen boş küme ve (0) ile gösterilen boş kümenin tekliğini “kümeleyelim”. Böylelikle D ile göstereceğimiz (0,(0)) çiftini elde ederiz.

Bu sefer D çiftinin iki elemanı aynı zamanda parçadır; D kümesine ait olan her şey aynı zamanda D kümesinde içerilir. Birinci eleman 0, yani boş küme sonuçta her kümede içerilir (bkz. 7.9). Özelde, D çiftinin bir parçasıdır. Fakat ayrıca 0, D kümesinin bir *elemanı* olduğu için onun tekliği, yani (0), D kümesinin bir *parçasıdır* (bkz. 7.11). Fakat (0), D kümesinin ikinci elemanıdır. Dolayısıyla bu eleman da D kümesinde içerilir. D kümesi, D’nin her elemanı bir parça olacak, D’ye ait olan her şey D’de içerilecek şekilde yapılanmıştır.

7.13 Cantor’un teoreminin öngörmeye olanak verdiği gibi, D kümesinde D’nin elemanı olmayan parçalar vardır. Örneğin bir elemanın her tekliği gibi, D’nin (0) elemanının tekliği de D’nin bir parçasıdır (bkz. 7.11). Bu “tekliğin tekliği”ni ((0)) olarak yazabiliriz. Gelgelelim bu nesne D kümesinin iki elemanı arasında yoktur.

7.14 Önemli bir tanım: Bir T kümesi, biraz önce inşa ettiğimiz D gibiyse *geçişlidir*. Yani bütün elemanları aynı zamanda parçaysa, ait olan her şey aynı zamanda içeriliyorsa, $t \in T$ olduğunda aynı zamanda $t \subset T$ oluyorsa geçişlidir.

7.15 Hiç kuşkusuz, geçişli kümeler vardır. Belki V, yani canlılar kümesi geçişlidir. Boşluktan inşa edilmiş şeffaf, hatta saydam olan (0,(0)) kümesi kesinlikle öyledir (boşluk ve boşluğun tekliği çifti, kendinde boşluk ve bir olarak boşluk çifti).

7.16 Modernite, Bir'in olmamasıyla tanımlanır (Nietzsche "Tanrı öldü" diyordu, fakat Yaşamın Bir'i onda ölünün yerini işgal ediyordu). Dolayısıyla biz modernler (veya "özgür zihinler") için Birsiz-Çokluk, bizatihi varolanın [étant] son sözüdür. Saf çokluğa dair düşüncenin, neyin çokluğu olduğundan bağımsız olarak (dolayısıyla: ne olursa olsun hiçbir nesne dikkate alınmadan) kendinde düşünülen çokluğun bir adı vardır: "matematiksel küme teorisi". Sonuç olarak bu teoremin her ana kavramı modern ontolojinin kavramı olarak düşünülebilir.

Geçişli küme kavramında durum nedir peki?

7.17 Ait olma, sunumun [présentation] ontolojik fonksiyonudur, bir çokluğun bir-olarak-sayılmasında sunulan şeye işaret eder. İçerilme, temsilin [représentation] ontolojik fonksiyonudur, bir sunum çerçevesinde parça olarak tekrar sayılan çokluklara işaret eder. Sunumla temsil arasındaki ilişkiyi belirlemek büyük bir sorundur (durumun hali sorunu).

Geçişli bir küme, ait olma ile içerilme, eleman ile parça, $\in$ ile $\subset$ arasında mümkün olan maksimum dengeyi temsil eder. Geçişlilik üstün türde bir ontolojik istikrarı ifade eder: sunumla temsil arasında mümkün olan en güçlü korelasyon.

Parçalar daima elemanlara göre fazladır (Cantor'un teoremi), bir kümenin elemanı olmayan küme parçaları mutlaka vardır. Gelgelelim, bütün elemanlar parça olduğunda, yani ele alınan küme geçişli olduğunda ait olma ile içerilme arasında maksimum bir eşleme olacaktır.

Geçişli kümenin bu içsel güçlü çerçevesi (çoklukta sunulan her şeyi, ait olma biçiminde ikinci bir kez daha temsil etmesi), bu denge, maksimal istikrar, beni geçişli kümelerin “normal” olduğunu söylemeye götürdü. Burada “normal” hem patolojik olmayan, istikrarlı, kuvvetli bir dengede olma anlamındadır; sunum ile temsil arasındaki dengesizliğe, fiilî biçimi olaysal kesinti olan bir dengesizliğe maruz kalmadığı anlamına gelir; hem de bir norma, ontolojik içkinliğin iki büyük kategorisi, yani ait olma ile içerilme arasında mümkün olduğu kadar kapsamlı bir eşlemeye tabi olduğu anlamına gelir.

- 7.18 Geçişli çokluk kavramı, sayı düşüncesinin *normal* temelini tesis edecektir. Geçişlilik aynı anda hem sayıyı varlığın dengeli dokusunda bir kesme [*découpe*] haline getiren şey hem de bu kesme için norm sağlayan şeydir.

8. Von Neumann Ordinaleri

8.1 Boşluk ve boşluğun tekliğinin çifti olan ve $(0, (0))$ şeklinde yazılan, 7.12'de ele aldığımız D kümesini yakından inceleyelim.

Bu D kümesinin geçişli olduğunu görmüştük: İki elemanı, 0 ve (0) aynı zamanda D 'nin parçasıdır. Burada ek bir yorum yapabiliriz: *Bu iki elemanın kendileri de geçişli kümelerdir.*

- (0) elemanının geçişli olduğu açıktır: (0) tekliğinin tek elemanı 0 'dır ve 0 “evrensel” parçadır, her kümede içerilir, özel olarak da (0) kümesinde içerilir. Dolayısıyla (0) elemanının tek elemanı aynı zamanda (0) 'ın parçasıdır. Sonuç olarak (0) geçişli bir kümedir.

- 0 , yani boş kümenin geçişli olması, her türlü özellik karşısında negatif “geçirgenliği”nin bir sonucudur. Bu geçirgenlik herhangi bir kümenin parçası olmasını sağlar (bkz. 7.9): Geçişli bir küme, bütün elemanların aynı zamanda parça olduğu kümedir. Öyleyse geçişli olmayan bir kümede bir parça olmayan en az bir eleman vardır. Halbuki 0 'ın hiçbir elemanı yoktur. Dolayısıyla geçişli olmaması mümkün değildir. Bunun sonucunda da geçişli olduğu ortaya çıkar.

D kümemizle sadece geçişli bir küme değil, geçişli kümelerden oluşan geçişli bir küme inşa ettik: Bu

geçişli küme, geçişli kümeleri “kümeler”. Hem 0, (0) hem de bunların (0,(0)) çifti geçişlidir.

8.2 Çok temel bir tanım: *Bir küme D gibiye, yani kendisi ve bütün elemanları geçişliye (von Neumann’ın verdiği anlamda¹) bir ordinaldir.*

8.3 Bu tanım, ordinal kavramının ontolojikleştirilmesinin teknik kısmını tamamlar. Burada söz konusu olan artık iyi sıralılık, doğal tam sayılar dizisinin imgesi veya herhangi bir işlemsel değer değildir. Kavramımız tamamen içkindir. Ordinalin belirli bir iç yapısal biçimini tayin eder: iki ontolojik işlemci, ait olma ve içermeyi, $\in$ ile $\subset$ ’yi çok özel bir şekilde birbirine bağlayan biçim.

Dolayısıyla bize örnek görevi gören D kümesi bir ordinaldir. Bu ordinalin kimliği üzerindeki perdeyi biraz aralayabiliriz: *İki sayıdır.* Ayrıca bu İki, von Neumann ordinallerinin *var olduğunu* ileri sürmemize olanak verir.

8.4 Bu yeni ordinal kavramını kullanmadan önce, düşünce için tanımının statüsünü ve ordinallerin neden *bütün* sayıların mutlak ontolojik ufkunu tesis ettiğini kabaca inceleyelim.

1 John von Neumann iyi sıralılık kavramından bağımsız olarak ordinallere dair bir tanımı ilk kez 1923 yılında Almanca yazılmış bir makalede vermişti: “Sonluötesi Sayılara Giriş”. İngilizcesi için bkz. J van Heijenoort (ed.), *From Frege to Gödel*, a.g.e., s. 346-354.

Geçişli kümelerden hareketle ordinallerin tanımlanması Raphael M. Robinson’un 1937’de İngilizce yayımladığı bir makaleye dayanır: “Sınıflar Teorisi, von Neumann Sisteminde Bir Değişiklik”. Metnin orijinali için, bkz. *The Journal of Symbolic Logic*, no. 2, s. 29-36.

8.5 Geçişli bir kümenin, “normal” çokluğun ontolojik şeması olduğunu belirtmiştim (7.16). Temsilin sunum karşısındaki fazlalığının düzeltilemez olduğu dikkate alınır, geçişlilik ikisi arasında maksimal dengeyi temsil eder.

Sadece bir ordinalin kendisi değil, bütün elemanları da geçişlidir. Bir ordinal kendisini karakterize eden normalliği, normu olduğu çokluğun içerisine yayar. Normalliklerin normalliğidir, dengelerin bir dengesidir.

Bunun sonucunda çok önemli bir özellik ortaya çıkar: *Bir ordinalin her elemanı bir ordinaldir.*

W bir ordinal² ve x bu ordinalin bir elemanı olsun ($x \in W$). W bir ordinal olduğu için tüm elemanları geçişlidir ve dolayısıyla x geçişlidir. Aynı nedenle (W 'nin ordinalliği nedeniyle) W 'nin kendisi de geçişlidir; dolayısıyla W 'nin elemanı olan x , aynı zamanda W 'nin bir parçasıdır ($x \subset W$). Buna göre x 'in bütün elemanları, W 'nin de elemanlarıdır. W 'nin bütün elemanları geçişli olduğu için aynı şey x 'in bütün elemanları için de geçerlidir. Böylelikle x kümesi, bütün elemanları geçişli olan geçişli bir kümedir: Bir ordinaldir.

2 Yaygın literatürde Yunan harfleriyle yazılan ordinarler kitap boyunca W ve w harfleriyle belirtilecek ve W_1 veya w_3 'te olduğu gibi yanına sayısal indisler eklenecektir. Genel olarak W veya w bir ordinal değişkeni (herhangi bir ordinali) belirtir. Özel olarak “her W ordinali için” türünde ifadeler kullanacağız. Indisli gösterim, “ N_1 Sayısının maddesi W_1 ordinali olsun” ifadesindeki gibi belirli bir ordinale işaret etmek için kullanılacak. Küçük harfler başka bir ordinale ait olan bir ordinali belirtmek için çoğunlukla $\in$ işaretinin solunda yer alacak; örneğin $w_1 \in W$ (yani, w_1 ordinali W ordinalinin bir elemanıdır).

8.6 Geçişlilik bir istikrar özelliği idiyse; buradaysa karşımıza bir *homojenlik* özelliği çıkar: Bir ordinalin içsel çokluğunu oluşturan şey, ona ait olan elemanlar ordinallerdir. Bir ordinal, bir ordinaller çokluğunun bir-olarak-sayılmasıdır.

Ordinal çokluğun bu homojen ve istikrarlı “dokusu”, beni ordinallerin *doğal* çokluğun ontolojik şemaları olduğunu söylemeye iten şey. “Doğal” diye adlandırdığım tam olarak (*tarihsel*, istikrarsız, heterojen olan ve bu yüzden olaysal kesintiye maruz kalan çokluklara zıt olarak) matematiğin düşündüğü haliyle temelinde yatan çoklu varlığı, maksimum bir tutarlılık, eksiksiz bir istikrar ve –bu çoklu varlığı oluşturan şeyin kendisiyle *aynı türde olması* anlamında– mükemmel bir homojenlik örneği sağlayan şeydir.

Öyleyse bir ordinalin, doğal bir çokluğun varlık endeksi olduğunu kati olarak öne süreceğiz.

8.7 Ordinallerin sayının büyük ontolojik “temel”ini oluşturduğu doğruysa, pekâlâ sayının doğal varlığın bir figürü olduğu veya sayının *Doğanın bir ürünü* olduğu da söylenebilir. Yine de “Doğa”nın burada duyularla algılanabilen hiçbir şeye, hiçbir deneyime gönderme yapmadığı ikazı zorunlu: “Doğa”, ontolojinin, saf çokluğa dair düşüncenin veya kümeler teorisinin bir kategorisidir.

8.8 Doğrudan ordinallerin “sayı olduğunu” söylemeli miyiz? Ordinaller aracılığıyla tam sayılar dizisinin sonsuza genişlemesini elde ettiğini düşünen Cantor’un görüşü tam da buydu. Fakat henüz hiçbir sayı kavramı ileri

sürmemiş bizler için böyle bir kabul sadece kanıtlanması gereken şeyi doğru saymak olacaktır. Benim Sayı (haşmet belirtmeyen, ama bilinen veya bilinmeyen tüm sayı türlerini kapsayan bir kavrama işaret eden büyük harfle Sayı) diye adlandıracağım şeyi tanımladıktan sonra ordinallerin bir yandan bu tanımda belirleyici bir rol oynadığını, öte yandan sayılar arasında, varlığın *Doğanın zemini üzerine* savurduğu sayısal kalabalıkta *temsil edilebilir* olduğunu göreceğiz. Öyleyse ordinaller hem *bizim* Sayıya erişimimizin, Sayıya dair düşüncemizin aracı olacak hem de kendisini her bakımdan aşan bir Sayılar bolluğunda kaybolmuş olsalar da kendileri de Sayılar olduğu için orada temsil edilebilir veya resmedilebilir olacaklar.

8.9 Boş küme, 0 bir ordinaldir. Geçişli olduğunu daha önce görmüştük (8.1). Bütün elemanlarının da geçişli olduğu açıktır: *Hiçbir* elemanı olmadığına göre geçişli *olmayan* bir elemanı olması nasıl mümkün olur ki? Bütün sezgilere zıt olarak, sıfır veya boşluk, *doğal* bir ontolojik olgudur. Bütün dilleri ve düşünceleri varlığa diken boşluk, aynı zamanda sayının doğaya demir attığı noktadır.

8.10 Von Neumann ordinallerinin çok önemli iki özelliği bulunur:

1) Temel ontolojik bağıntı, çoklu-sunumun göstergesi olan ait olma bağıntısı üzerinden tam sıralıdır. Bu, W_1 ve W_2 gibi iki ordinal alındığında, ya birincisinin ikincisine ait olduğu ($W_1 \in W_2$) ya da ikincisinin birincisine ait olduğu ($W_2 \in W_1$) ya da ikisinin özdeş oldukları ($W_1 = W_2$) anlamına gelir.

2) Bir minimallik ilkesine uyarlar: Herhangi bir P özelliği verildiğinde, *eğer* bir ordinal bu özelliği taşıyorsa *o halde* aynı özelliği taşıyan bir en küçük ordinal vardır. Sıra düzeni daima ait olmadır: P özelliğine sahip bir W ordinali varsa ($P(W)$ önermesi doğruysa) *o halde* aynı özelliği taşıyan ve bu özelliği taşıyan en küçük ordinal olan bir W_1 ordinali vardır ($W_2 \in W_1$ ise W_2 bu özelliğe *sahip değildir*).

Bu iki özellik doğaldır. Birincisi doğal çokluklar denen istikrarlı ve homojen çoklukların evrensel birbirine dolanıklığını ifade eder (bkz. 8.6): Varlıklarında düşünüldüğünde iki doğal çokluk, yani iki ordinal bağımsız olamaz. Ya biri ötekinin sunumundadır ya da tersi geçerlidir. Doğa, farksızlığa/kayıtsızlığa veya bağlantısızlığa tahammül etmez. İkinci özellik doğanın “atomsal” karakterini veya başka bir deyişle “kuantik” karakterini ifade eder. Bir özellik herhangi bir doğal çokluk için geçerli olduğunda, bu özelliğin minimal kaidesi olan bir doğal çokluk mutlaka vardır.

Bu iki özellik birlikte alındığında, doğanın global statüsü ile yerel statüsünü eklemler. *Büyük harfle* Doğa var olmasa da (zira bütün ordinallerden oluşan küme diye bir şey yoktur, bkz. 6.11), doğal çokluklar arasında bir tür düzlem birliği, global karşılıklı bağımlılık birliği vardır: Şeması oldukları sunum daima “iç içe geçmiştir”. Boşluk haricinde, Eskiler’in atomları gibi doğanın ayırt edilemez ve eşsiz bileşenleri olmasa bile, her özelliğin doğanın “bölgeleri” için geçerli olan yerel bir istisna noktası vardır: söz konusu özelliğin minimal kaidesi.

Global ve yerel olanın bu eklemlenişi, her Fiziğe ontolojik çerçevesini verir.

8.11 Temel iki özelliğin (tam sıralılık ve minimalite) her biri von Neumann ordinallerinin tanımına dayanarak *ispatlanabilir*.

Bu ispatlar, küme teorisinin (çokluğun ontolojisinin) bir ana ilkesine dayanır: temellendirme aksiyomu.³ Söz konusu aksiyom her durumun (her saf çokluğun) durumla “ortak hiçbir noktası” olmayan en az bir terimi (bir elemanı) olduğunu söyler; bu terimi oluşturan hiçbir şey (yani bu elemanın hiçbir elemanı) durumda sunulmamıştır (baştaki çokluğa ait değildir).

8.12 Kedime geri dönelim (bkz. 7.6). Kedim canlı varlıklar kümesinin bir elemanıdır ve kendisi de –canlı organizmalar oldukları kabul edilirse– bu kümenin elemanları olan hücrelerden oluşmuştur. Fakat hücreyi moleküllerine, sonra da atomlarına ayırdığımızda artık canlı varlıklar kümesine ait olmayan tamamen fiziksel elemanlarla karşılaşırız. Canlı varlıklar kümesinde olan, fakat sadece “atıl” fiziksel-kimyasal maddesellik ile ilgili olduğu için hiçbir elemanı bu kümede olmayan bir terim (belki hücre) vardır. Kümeye ait olan, ama hiçbir elemanı kümeye ait olmayan bu terim için, kümeyi

3 Aynı zamanda düzenlilik aksiyomu olarak da adlandırılan temellendirme aksiyomu 1917’de Mirimanoff tarafından öngörülmüştü ve von Neumann tarafından 1925 yılında açıklığa kavuşturuldu. Başlangıçta bilhassa Mirimanoff’un “olağanüstü kümeler” diye adlandırdığı, kendisinin elemanı olan kümeleri veya $\dots \in a_{n+1} \in a_n \dots \in a_2 \in a_1 \in E$ türünde azalan bir sonsuz zincir içeren kümeleri ortadan kaldırmak söz konusuydu. Daha sonra bu aksiyomun kümeler Evreninin hiyerarşik bir sunumuna olanak verdiği fark edildi.

Bu aksiyoma dair tarihsel ve kavramsal bir yorum için bkz. A. Fraenkel, Y. Bar-Hillel ve A. Levy, *Foundations of Set Theory*, North-Holland, 2. baskı, 1973, s. 86-102.

kurduğunu veya kümenin temel bir terimi olduğunu söyleyeceğiz. “Temel” burada, söz konusu terimden daha aşağı bir düzeyde, terimi oluşturan şey kazıldığında başlangıçtaki kümeden çıktığımız, o kümenin sunum kapasitesini aştığımız anlamına gelir.

- 8.13 Canlıları, kedileri, hücreleri ve atomları yine bir kenara bırakalım. Boşluğun tekliğinin tekliğini, yani tek elemanı boşluğun tekliği olan kümeyi düşünelim: Bu, $((0))$ olarak gösterilir. Bu kümenin (0) elemanının tek elemanı boşluk, yani 0 'dır. Fakat boşluk, tek elemanı (0) olan başlangıçtaki $((0))$ kümesinin elemanı *değildir*; zira boşluk, yani 0 ile boşluğun tekliği, yani (0) farklı kümelerdir. Dolayısıyla $((0))$ kümesinde (0) temel bir yerel noktayı temsil eder: Kalkış noktasındaki kümeyle hiçbir ortak elemanı yoktur. Çokluk olarak sunduğu şey, yani 0 , içinde yer aldığı sunumda $((0))$ tarafından sunulmaz.

Temellendirme aksiyomu bu durumun varlığın bir yasası olduğunu söyler: Her çokluk temellendirilmiştir, her çokluk, çokluğun sunduğu şeyden hiçbir şey sunmayan en az bir eleman kapsar.

- 8.14 Temellendirme aksiyomunun çok önemli bir sonucu vardır: *Hiçbir küme kendisinin elemanı olamaz, ya da hiçbir çokluk kendi sunumunda yer alamaz, ya da hiçbir çokluk bir olarak sayılamaz. Bu anlamda varlık, yansıma [réflexion] nedir bilmez.*

E , kendisinin elemanı olan bir küme olsun: $E \in E$. Bu kümenin tekliğini, yani (E) 'yi düşünelim. Bu tekliğin tek elemanı E 'dir. Dolayısıyla (E) 'yi E 'nin temellen-

dirmesi gerekir. Fakat bu imkânsızdır, çünkü E, E'ye aittir ve (E) ile daima ortak bir elemanı vardır: kendisi. Temellendirme aksiyomu varlığın bir yasası olduğu için başlangıçtaki hipotezi reddetmek gerekir: Kendisinin elemanı olan hiçbir küme yoktur.

- 8.15 Ordinallerin önemli özelliklerine geri dönelim. Temellendirme aksiyomu kabul edildiğinde bu özellikler ispatlanabilirler. Burada minimallik ilkesini ispatlayacağım. Ait olmaya göre tam sıralılık ilkesi için dipnota⁴ başvurabilirsiniz.

W_1 , P özelliğine sahip bir ordinal olsun. W_1 minimalse her şey güzel. Öyle olmadığını varsayalım. Bu durumda W_1 'den daha küçük olan (ele alınan sıra düzeni ait olma olduğuna göre bu durumda W_1 'e ait olan) ve bu özelliği taşıyan ordinaler vardır. Bu ordinalerden oluşan E kümesini (P özelliğine sahip ve W_1 'e ait olan her şeyin “kümesi”) düşünelim. E, temellendirme aksiyomuna uyar. Dolayısıyla E kümesinin ordinal olan (çünkü E bir ordinaler kümesidir), P özelliğini taşıyan (çünkü E'nin bütün elemanları bu özelliği taşır) ve E ile hiçbir ortak elemanı olmayan bir W_2 elemanı vardır.

Fakat W_1 bir ordinal olduğu için geçişlidir. Dolayısıyla ona ait olan W_2 aynı zamanda onun bir parçasıdır da: W_2 'nin elemanları aynı zamanda W_1 'in de eleman-

4 $\in$ yani aidiyetin ordinalleri tam sıraladığına (kesin sıralama), başka bir deyişle, W_1 ve W_2 iki farklı ordinalse ya $W_1 \in W_2$ ya da $W_2 \in W_1$ olduğuna dair ispatın iyi bir takdimi için, bkz. J. R. Shoenfield, *Mathematical Logic*, Addison-Wesley, 1967, s. 246-247.

Bu ispat *L'Être et l'Événement*'da işlenmiş ve yorumlanmıştır, a.g.e., 12. meditasyonun 3. paragrafı, s. 153-158.

larıdır. W_2 'nin bir elemanı P özelliğine sahipse W_1 'in bir elemanı olacağı için, W_2 E kümesine ait olmalıdır (çünkü E , W_1 kümesinin P özelliğini taşıyan bütün elemanlarının kümesidir). Buysa mümkün değildir, çünkü W_2 , E kümesini temellendirir ve dolayısıyla E kümesiyle hiçbir ortak elemanı yoktur. Sonuç olarak W_2 'nin hiçbir elemanı P özelliğine sahip değildir ve W_2 bu özellik için minimaldir. CQFD.

- 8.16 Sayıların kesmeyle üzerinden alınacağı ontolojik kumaş böyle örülür. Homojen, birbirine dolanık, kökeni boşlukta olan, her özellik için yerel olarak minimumlaştırılabilen bu kumaş gayet tabii bir *ufuk yapısına* sahiptir.

9. Ardışıklık ve limit. Sonsuz

9.1 6. bölümde ordinal nosyonuna dair Dedekind ve Cantor'un (iyi sıralılıktan hareket eden) yaklaşımından bahsederken tüm meselenin bir ordinalden sonra tamamen belirlenmiş bir başka ordinal gelmesi ve bu serinin sürekli devam etmesi olduğunu görmüştük. Ayrıca n 'den $n+1$ 'e (n 'nin ardılına) "geçmekle", "bütün" doğal sayılardan bunların ötesi olan, ω sonsuz ordinaline geçmenin hiç de aynı şey olmadığını da görmüştük. İkinci durumda bir sıçrama olduğu, bir "limit alma"nın kesintisizliğinin ortaya çıktığı açıktır.

Von Neumann'ın öne sürdüğü ve 8. bölümü ayırdığımız, ordinallerin ontolojikleştirilmiş kavramında, basit ardışıklık ile sonsuza "sıçrama" arasındaki bu diyalektiği yine bulabiliyor muyuz? Daha genel olarak, sonsuz bir çokluğun varlığına dair çetrefilli soru bu yeni çerçevede nasıl ortaya çıkıyor?

9.2 Önce ardışıklık kavramına bağlı kalalım.

Burada dikkatli olmak gerekiyor. Ardışıklık, bir sonrakine "geçiş" imgesi, sayının dolaysız temsiliinde o kadar güçlüdür ki sıklıkla sayının özünün *kurucu ögesi* olduğuna inanırız. J. A. Miller'ı tam da sayı meselesini, sayının ardışıklığa dayanan üretiminde ısrar eden şe-

yin belirlenmesine indirgediği için eleştirmiştım (bkz. 3.17). Sayısal alanın seri geçiş yasaının, bize dayatılan yasanın, çokluğun tekil biçimi olarak sayının ontolojik içkinliğiyle örtüşmediğini savunmuştım.

Bundan dolayı, Von Neumann'ın ordinaleri kavrayışında ardışıklık fikri tekrar karşımıza çıkıyorsa, bunun da ontolojikleştirme işlemine tabi tutulması gerekir. Amacımız bir geçiş ilkesi keşfetmekten çok, ardıl olmayana zıt olarak ardıl olan şeyin içsel bir niteliğini bulmak olacak. Bizim için önemli olan ardışıklık değil, *ardılın varlığı*. Peano'nun +1 şeklindeki tekrarlı monotonluğu artık bizi ilgilendirmiyor: Düşünmek istediğimiz, sadece ek adım kipinde kendisine ulaşmamıza olanak veren şeyin kendinde varlığıdır.

9.3 Von Neumann anlamında bir W ordinalini (bütün elemanları geçişli olan geçişli küme) düşünelim.

Elemanları şu şekilde olan bir küme:

- W 'nin bütün elemanları;
- W 'nin kendisi.

W çokluğunu oluşturan her şeye ek *bir* eleman, yani bizzat W 'yi "ekliyoruz". W kümesinin asla kendisinin bir elemanı olmadığını bildiğimize göre (bu, temellendirme aksiyomunun bir sonucudur, bkz. 8.14) burada gerçekten de yeni bir elemanın katılması söz konusudur.

Burada +1'in işlemsel olmayan bir biçiminin ortaya çıktığını görebilirsiniz: Söz konusu olan haricî bir ekleme, dışsal bir "artı" değil, bir tür içkin bir burulmadır; bu burulma, W 'nin içsel çokluğunu söz konusu çokluğun bir-olarak-sayılmasıyla "tamamlar"; adı tam

da W olan bir saymayla. Buradaki $+1$, küme teorisinin birleştirme yetki alanını, daha önce bu birleştirmenin ilkesi olan şeye, yani kümenin birine, artık elemanlarıyla birlikte dizilen, *onlarla birlikte* sayılan W 'ye genişletmekten oluşur.

9.4 Bu prosedüre bir örnek verelim.

Boşluk ve boşluğun tekliğinden oluşan çift olan ve $(0,(0))$ ile gösterilen D kümesinin bir ordinal olduğunu göstermiştik (kendisi ve bütün elemanları geçişlidir). $+1$ 'in işlemsel olmayan belirlenimi şu üç elemanlı kümeyi oluşturmaya denktir: D 'nin iki elemanı ve bunlara ek olarak D 'nin kendisi. Bu ise $(0,(0),(0,(0)))$ ile gösterilecektir (D 'yi “bütün haliyle” üçüncü konumda görebilirsiniz). Bu üçlüyü T olarak adlandıralım. O halde aşağıdakileri ispatlayacağız:

- T geçişlidir. Birinci elemanı, 0 evrensel parçadır, dolayısıyla 0 , T 'nin bir parçasıdır; ikinci elemanı (0) , birinci elemanın, yani 0 'm tekliğidir. Dolayısıyla T 'nin bir parçasıdır (bkz. 7.11). Üçüncü elemanı, $(0,(0))$, ilk iki elemanın “kümelenmesi”, çift haline getirilmesinden ibarettir. Dolayısıyla o da bir parçadır. T 'nin bütün elemanları bir parça olduğuna göre T geçişlidir.

- T kümesinin bütün elemanları geçişlidir. D kümesinin bir ordinal olduğunu gösterdiğimizde 0 ve (0) elemanlarının geçişli olduğunu ispatlamıştık. Kendisinin de, yani $(0,(0))$ 'ın da geçişli olduğunu göstermek zorunda kalmıştık. Sonuç olarak bunlar tam da T kümesinin üç elemanıdır.

Böylelikle D kümesinin elemanlarına D “eklenerek” elde edilen T kümesi bir von Neumann ordinalidir: bütün elemanları geçişli olan geçişli bir küme.

- 9.5 Biraz önce kullandığımız akıl yürütme zahmetsizce genelleştirilebilir. W herhangi bir ordinalsal gidişat, T için kullanılanla aynıdır: W kümesinin elemanlarına, W 'nin kendisinin bir eleman olarak eklenmesiyle elde edilen küme bir ordinaldir.

W 'den yeni bir ordinalsal, W 'nin elemanlarına tek bir ek eleman ekleyerek “geçeriz” (bu da örnekte kullandığımız T 'nin kimliği üzerindeki perdeyi aralamamıza izin verir: Tıpkı D 'nin iki olması, yani *iki sayısının varlığı* olması gibi, T de bizzat Üç sayısıdır).

W 'den, elemanları W 'nin elemanlarına bunların birleştirilmesinin bir-adının eklenmesi olan yeni bir ordinalsal, bir tür içkin $+1$ ile geçmemiz aşağıdaki tanıma gerekçe sağlar: *W 'nin elemanlarına W eklenerek elde edilen ordinali, W ordinalinin ardılı olarak adlandıracağız ve $S(W)$ ile göstereceğiz.*

Örneğimizde T (üç), D 'nin (iki) ardılıdır.

- 9.6 Ikiden Üçe veya W 'den $S(W)$ 'ye “geçiş” fikri aslına bakarsanız saf bir metafordur. Gerçekte ilk başta çoklu-varlığın figürleri, D ve T vardır ve tanımını yaptığımız şey, tüm anlamı *bizim için* bu varlıkların anlaşılabilir geçişini kolaylaştırmak olan bir *bağıntıdır*. Sonluluk, varlığın bağlantısızlığını bağlantılandırmayı gerektirir. Böylelikle $T=S(D)$ ardışıklığında, dayanağı gerçekte içkin olan bir bağıntı düşünürüz: T , D 'nin ardılı olma şeklinde, ontolojik bileşiminde doğrulanabilir olan yapısal bir özelliğe sahiptir ve T 'yi D 'ye dışarıdan bağlayan S bağıntısıyla inşa edilmiş veya tanımlanmış olarak temsil etmemiz zorunlu bir illüzyondan ibarettir.

Daha titiz bir felsefi yaklaşım, kendinde ordinalleri incelemeye ve *ardıl olma özelliğini taşıyıp taşımadıkla-*

rım sormaya dayanır. Örneğin D , T 'nin bir elemanı (ve ayrıca ileride göreceğimiz gibi, içkin olarak ayırt edilebilir bir elemandır; T 'de "maksimal" elemandır) olduğu için doğrudan fark edilebilir bir şekilde, T 'nin D 'nin ardından gelme özelliği vardır.

Ardından gelme özelliğine sahip bir ordinali, *ardıl ordinal* olarak adlandıracamız.

Böylelikle, T bir ardıl ordinaldir.

- 9.7 "W'nin ardından gelme" özelliğinin, ardışıklığın içsel kavramında gizil olarak bulunduğu ve dolayısıyla ontolojik bağlantısızlığa yerleşmekte başarısız olduğumuz söylenerek itiraz edilebilir. Bu itirazı bastıracağız.

Tamamen içkin olan şu özelliğe sahip bir W ordinali düşünün: W 'nin elemanları arasında, W 'nin bütün diğer elemanlarının elemanı olduğu w_1 adlı bir eleman olsun: w_2 , W 'nin w_1 'den farklı bir elemanıysa bu durumda $w_2 \in w_1$ olacaktır. W zorunlu olarak bir ardıl ordinaldir (aslında w_1 'in ardından gelir).

Böyle bir durum varsa, nedeni W 'nin elemanlarının aşağıdaki gibi olmasıdır:

- bir yanda w_1 elemanı;
- öte yanda, w_2 gibi w_1 'in elemanı olan elemanlar.

Fakat gerçekte w_1 'in bütün elemanları W 'nin de elemanlarıdır. Zira ait olmanın, yani $\in$ 'nin ordinaler üzerinde bir tam sıralılık olduğunu biliyoruz (bkz. 8.10). Bir ordinalin bütün elemanları da ordinaldir (bkz. 8.5). Özelde W 'nin bütün elemanları ordinaldir, dolayısıyla w_1 bir ordinaldir ve bundan da w_1 'in bütün elemanlarının ordinal olduğu sonucu çıkar. Bu elemanlar w_1 ve W ordinallerine ait olma denen tam sıralılık bağıntısıyla

bağlanır: $w \in w_1$ ise, $w_1 \in W$ olduğu için $w \in W$ olur (sıralılık bağıntısının geçişliliği).

Böylelikle W , w_1 'in bütün elemanları ve ek olarak w_1 'in kendisinden oluşur: W tanımı gereği w_1 'in ardıdır.

Bir ordinalin, örneğimizde W için w_1 'in tuttuğu yere benzer bir yer tutan elemanını, o ordinalin *maksimal elemanı* olarak adlandıralım: Ordinalin diğer bütün elemanları, maksimal elemana aittir. Her ordinalin bir maksimal elemanı olduğunu söylemiyoruz. Fakat yukarıdaki akıl yürütme şu tanımı yapmamıza olanak veriyor: *Bir ordinalin maksimal elemanı varsa o ordinal ardıldır.*

Böylece elimizde ardıl ordinaire dair tamamen içsel bir tanım oluyor. Sadece ordinalin çoklu yapısının, merkezindeki eleman aidiyetlerinin dokusunun incelenmesiyle tespit edilebilir olan “içsel” bir maksimumun tekil varoluşu, ardıllık niteliğini kurale bağlamamıza olanak verir.

9.8 Elimizde “neyin ardıl” olduğuna dair bağıntısal veya seri yapısında olan bir kavram değil, içkin bir kavram olduğu için şu soruyu yöneltebiliriz: *Ardıl olmayan ordinaler var mıdır?*

9.9 Boş küme, 0, ardıl olmayan bir ordinaldir. Hiçbir şeyin ardından gelemeyeceği açıktır, zira hiçbir elemanı yoktur ve ardıl olmak için en azından bir elemana, yani ardından geleceği ordinaire ihtiyacı vardır.

Ya da içkin nitelemeye daha yakın durmak için şöyle diyebiliriz: Ardıl olmak için 0'ın maksimal bir elemanı

olması gerekir. Hiçbir elemanı olmadığına göre ardıl olamaz.

Boşluğun ontolojik çapa fonksiyonu tekrar karşımıza çıkıyor: Sadece varlığında karar verilen boşluk *çıkarsanamazdır* ve özel olarak ardıl değildir: Boşluğun kendisi *boşluğun kıyısındadır*, köken noktası olduğu varlıktan sonuç olarak çıkamaz.

9.10 Örnek olarak verdiğimiz ve boşluk olmayan bütün ordinaler ardıldır. Böylelikle 1 sayısı olan (0), 0'ın ardılıdır. Varlığı boşluk ve 1'i birleştiren (0,(0)) şeklindeki 2, 1'in ardılıdır. Boşluk, 1 ve 2'yi birleştiren ve (0,(0),(0,))) şeklinde yazılan T (yani 3), 2'nin ardılıdır. İstersek devam edebilir, 4 ve 5'i ve *hepsi ardıl ordinaler* olan istediğimiz doğal tam sayıyı elde edebiliriz.

9.11 Bu, doğal tam sayı düşüncesine ulaştığımız anlamına mı gelir? Henüz değil. Her birini çoklu-varlığında düşündüğümüzde 1, sonra 2, sonra 3'ün, vs. doğal tam sayılar olduğunu söyleyebiliriz. Fakat bunların konuşlandığı yeri belirleyemediğimiz için bu adım adım tayinin ötesine geçip tam sayıya dair genel bir kavram ileri sürmemiz imkânsızdır. Dedekind'in görmüş olduğu gibi böyle bir kavram sonsuza sapmayı gerektirir, zira sonlunun içinde sebat ettiği yer sonsuzdur. Söyleyebileceğimiz tek şey, tam sayıların ardıl ordinaler olduğudur. Fakat bu, onları nitelendirmek için kesinlikle yeterli değildir: Tam sayı olmayan başka ardıllar, hatta sonlu küme bile olmayan ardıllar pekâlâ olabilir.

9.12 Soru şuna dönüşüyor: *Boşluk dışında* ardıl olmayan ordinaler var mıdır?

O'dan farklı ardıl olmayan ordinalleri (henüz bunlar var mı yok mu bilmiyor olduğumuz halde) *limit ordinaller* olarak adlandıralım. Soruyu tekrarlayalım: Limit ordinaller var mıdır?

Henüz bu soru hakkında karar verecek durumda değiliz. Fakat *şayet varsa*, ardıl ordinallerden yapısal bakımdan çok farklı olduklarını ispatlayabiliriz.

9.13 W ordinali ile ardılı $S(W)$ arasına hiçbir ordinal gelemmez. Bununla demek istediğimiz, ordinaller arasındaki sıra bağıntısı ait olma bağıntısı olduğu için $W \in W_1 \in S(W)$ gibi bir diziyi sağlayacak hiçbir W_1 ordinali olmadığıdır.

W 'nin, $S(W)$ 'de maksimal eleman olduğunu biliyoruz (bkz. 9.7). Sonuç olarak $S(W)$ 'nin W 'den farklı *bütün* elemanları W 'ye aittir. Gelgelelim farazi W_1 , $S(W)$ 'ye aittir. Bu durumda aşağıdakilerden biri doğru olmalıdır:

- Ya W_1 , W ile özdeştir. Fakat bu imkânsızdır, zira $W \in W_1$ olduğunu varsaydığımız için bu $W \in W$ ile sonuçlanacaktır. Fakat hiçbir kümenin kendi elemanı olamayacağını biliyoruz (bkz. 8.14).

- Ya da W_1 , W 'nin bir elemanıdır, ama bu durumda da $W \in W_1$ olamaz çünkü $W_1 \in W$.

Ordinal ardışıklığının, ilk hal ile son hal arasında bir boşluk açmak anlamında, "bir adım daha"nın şeması olduğunu görüyoruz. W ordinali ile $S(W)$ ardılı arasında *hiçbir şey* yoktur. Yani doğal hiçbir şey, hiçbir ordinal yoktur. Bir ardıl ordinalin, kendisinin hemen "arkasında" hiçbir şeyin yerleşemeyeceği bir gediğin sınırlarını belirlediğini de söyleyebiliriz. Bu anlamda bir şeyin ardından gelmekten çok, *bir ardıl ordinal başlar*:

Kendisinden önce gelenle hiçbir bağı, hiçbir sürekliliği yoktur. Ardıl ordinal, varlıkta bir başlangıca dair düşünceye olanak verir.

- 9.14 Şayet varsa, bir limit ordinal için her şey çok farklıdır. Böyle bir ordinalin tanımının bütünüyle negatif olduğuna iyi dikkat etmek gerekiyor: Şu an için hakkında bildiğimiz tek şey, ardıl *olmadığıdır*. Ayrıca şunu da söyleyeceğiz: Maksimal elemanı yoktur. Fakat bu eksikliğin sonuçları çok önemlidir.

L farazi bir limit ordinal ve w_1 bu ordinalin bir elemanı olsun. w_1 maksimal olmadığı için L'de mutlaka ondan daha büyük bir w_2 elemanı vardır: Öyleyse bir zincir elde ederiz: $w_1 \in w_2 \in L$. Fakat w_2 de maksimal olmadığı için $w_1 \in w_2 \in w_3 \in L$ olacak şekilde bir w_3 olacaktır. Bu böyle devam eder.

Böylelikle, bir ordinal bir limit ordinaire ait olduğunda, ait olma bağıntısında bir üçüncüsü araya girer ve maksimal hiçbir eleman olmadığı için bu prosedürün durma noktası olmaması dolayısıyla, bir L limit ordinalinin herhangi bir w elemanı ile L'nin kendisi arasında daima, sezgisel anlamda, “sonsuz” ara ordinalin var olduğunu söyleyebiliriz. Dolayısıyla limit ordinal tam anlamıyla bir şeyin ardından gelmez. Hiçbir ordinal ona ait olan sonuncu ordinal, ona en “yakın” ordinal değildir. Bir limit ordinal, kendisine ait olan ordinallerin hepsine her zaman eşit “uzaklıkta”dır. L'nin w elemanı ile L arasında, araçların bulunduğu sonsuz bir mesafe bulunur.

Sonuç olarak, bir ardıl ordinalde gerçekleşene zıt olarak, bir limit ordinal kendi gerisinde hiçbir gedik

oymaz. Bir w elemanını istediğiniz kadar L 'nin “yakınında” hayal edin, w ile L arasındaki mesafede sonsuz çoklukta ordinal vardır. Öyleyse, limit ordinal L , kendisinden önce gelenle bir *yapışma* ilişkisi içindedir; bir ordinaler sonsuzluğu, orada olduğu varsayılan her değeri doldurarak limit ordinalin tabanına “yapışır”.

Ardıl ordinal radikal başlangıcın ontolojik ve doğal şemasıysa, limit ordinal, gediksiz dönüşümün, sonsuz sürekliliğin *duyulur olmayan sonucunun* şemasıdır. Bu da, her eylemin, her iradenin ya ardılın ya da limitin sancağının gölgesinde olduğunu söylemeye denktir. Doğa burada devrim (*tabula rasa*, gedik) ve reformla (karşılıklı mutabakata dayalı ve acısız, duyulur olmayan kademeli geçişler) ilgili o kadim meseleyi karşımıza getirir.

- 9.15 (Bizim için doğal çoklu varlığın yüklemeleri olan) ardılar ile limitler arasındaki farka işaret etmenin başka bir yolu şudur.

Bir E kümesinin elemanlarının elemanları tarafından oluşturulan kümeyi E kümesinin birleşim kümesi olarak adlandıralım. Burada çokluğun ontolojisinin çok önemli bir işlemcisi söz konusudur: *saçılım* işlemcisi. E 'nin birleşim kümesi, E 'nin elemanlarının “içini boşaltır” ve bu boşaltmanın ürettiği her şeyi, E 'nin bir-olarak-sayılmasını temin ettiği elemanlarda kapsanan bütün elemanları bir araya toplar.

Örnek verelim. Boşluk, boşluğun tekliği ve boşluk ve tekliğinden oluşan çiftin oluşturduğu T kümesi veya üç örneğini ele alalım. Bu küme $(0, (0), (0, (0)))$ şeklinde yazılır. T 'nin birleşim kümesi nedir?

T'nin birinci elemanı, hiçbir elemene sahip olmayan 0'dır. Dolayısıyla birleşim kümesine hiçbir eleman veremeyecektir. İkinci eleman (0)'dır ve tek elemanı 0'dır. Bu son eleman birleşim kümesinde yer alacaktır. Son olarak, üçüncü eleman (0,(0))'dır ve iki elemanı 0 (ki daha önce elde etmiştik) ve (0)'dır. T birleşim kümesi, T'nin elemanlarının elemanlarının kümesi olan 0 ve (0)'dan oluşur: Bu, (0,(0)) çiftidir, yani D kümemiz veya iki sayısı. Üçün saçılımı ikinin ta kendisidir. Bu arada T'nin birleşim kümesinin, T'nin kendisinden “daha küçük” olduğunu belirtelim (9.18'de bu hususu aydınlatacağız).

- 9.16 Birleşim bakımından ordinalerin konumu tamamen özeldir. Bir W ordinali geçişli olduğu için bütün elemanları aynı zamanda parçadır. Bunun sonucunda W 'nin, aynı zamanda W 'nin parçaları da olan elemanlarının elemanları W 'nin de elemanlarıdır. Bir ordinalin birleşim kümesinde sadece söz konusu ordinalin elemanlarını bulabilirsiniz. Bu da, bir ordinalin birleşim kümesinin, *ordinalin bir parçası olduğu* anlamına gelir. “E'nin birleşim” kümesini $\cup E$ olarak gösterirsek her ordinal için $\cup W \subset W$ elde edilecektir.

Bu özellik karakteristik olarak doğaldır: Bir ordinalin öyle bir iç homojenliği vardır ki, sağtığımızda, onu oluşturanların içini boşalttığımızda sadece kendisinin bir parçasını üretir. Doğal bir çokluğa uygulandığında saçılım bu çokluğun sadece bir “kısım”ı verir. Saçılım bakımından, istikrarlı ve homojen olan doğa asla kendi bileşenlerinin dışına “çıkamaz”. Ya da: Doğada doğal olmayan bir zemin yoktur.

9.17 Bir ordinalin birleşim kümesinin bu ordinalin bir parçası olması veya elemanlarının elemanlarının elemanlar olması şu soruya götürür: Bunlar *tamamı mıdır*? Nihayetinde “kısmi” bir parça (veya *öz parça*, bkz. 4.12) bile değil, sadece başlangıçtaki ordinali mi buluruz? Bir ordinalin iç dokusu tamamen birbirine dolanık olduğu için *bütün* elemanların bir elemanın elemanı olarak bulunuyor olması mümkündür. Bu durumda $\cup W = W$ olacaktır. Saçılım sadece doğal malzemeleri geri vermekle kalmaz, ilk bütünlüğü de geri getirir. Doğal bir kümenin saçılımı, *totolojik* bir işlem olacaktır. Tamamen nafil bir şey olduğu da söylenebilir: *Doğanın, kendisinin saçılmasına izin vermediği* sonucuna varabiliriz.

9.18 Bu cazip tez, şayet varsa, *limit ordinaler durumunda* doğrulanır.

Herhangi bir L limit ordinalin w_1 elemanını alalım. Daha önce w_1 ile L arasına, (w_1 ne olursa olsun) daima $w_1 \in w_2 \in L$ olacak şekilde, illa bir w_2 elemanının geleceğini göstermiştik (bkz. 9.14). Fakat L 'yi saçtığımızda w_1 elemanı, w_2 'nin elemanı olarak birleşim kümesinde yer alacaktır. Sonuç olarak L 'nin *bütün* elemanları $\cup L$ içinde yer alır. Tersine, $\cup L$ 'nin bütün elemanlarının L 'nin bir elemanı olduğunu görmüş olduğumuz (bkz. 9.15) için (çünkü $\cup L \subset L$), L ile $\cup L$ 'nin elemanlarının tamamen aynı olduğu sonucunu çıkarabiliriz. Bu da, L 'nin $\cup L$ ile özdeş olduğu anlamına gelir.

Öyleyse limit ordinal, saçılımın karşısına kendisiyle sonsuz kaynaşmasını koyar. Elemanlarının “kesilip parçalara ayrılması”, kendisini değiştirmemesi bakımından örnek niteliğinde doğaldır. Kendisinin saçılımıdır.

- 9.19 Bir ardıl ordinal ise, saçılımıyla özdeşleşmeye direnir. Birleşiminin kümesinden *fazla olarak* kalır.

Bir W ardıl ordinalini düşünelim. Tanımı gereği bu ordinal bir w_1 maksimum elemanına sahiptir. Gelgelelim bu elemanın, W 'nin birleşim kümesinde yer alması imkânsızdır. Birleşim kümesinde bulunuyor olsaydı W 'nin w_2 gibi bir başka elemanının elemanı olması gerekirdi, bu durumda $w_1 \in w_2$ olurdu ve w_1 maksimum olmazdı. Maksimum eleman w_1 *zorunlu olarak* W ile $\cup W$ arasındaki farkı oluşturur. Bir ardıl ordinalin, çoklu-varlığının basit saçılımla eski haline getirilmesini engelleyen en az bir elemanı vardır. Bir limitin tersine, bir ardıl, saçılımla “büzüşür”, değişir.

- 9.20 Bana göre bu zıtlığın devasa bir felsefi önemi var. Yaygın düşünce, “limitte” vuku bulan şeyin bir ardışıklıkta veya basit bir “bir adım daha”da söz konusu olan şeye göre daha karmaşık, anlaşılmaz olduğudur. Felsefi spekülasyon uzun zaman boyunca limitin kutsallaştırılmasından beslenmiştir. Başka bir yerde⁵ felsefenin şiire “dikilişi” diye adlandırdığım olgu, büyük oranda bu kutsallaştırmaya dayanır. Heideggerci Açılmış olan [Ouvr] teması, bir kapanışın azli teması, limitin, saymadan, teknikten, keşiflerin ardışıklığından, Aklın seri yapısından kopma olarak kabulünün modern biçimidir. Limitin bir *aurası* ve ardışıklığın bir varlık-olmayışı [désêtre] vardır. “Başka bir çağdan gelen kalp”, “zamanın durduğu o sonsuz

5 A. Badiou, *Manifeste pour la philosophie*, Paris, Seuil, 1989. Nietzsche ve Heidegger'den başlayarak felsefenin şiire dikilişinin koşulları ve sonuçları “Şairler Çağı” başlıklı 7. bölümde kısaca anlatılmaktadır.

çayırlara doğru”⁶ hareketin peşindedir (ve görünüşe göre bu ufuk etkisi sadece şiirle yakalanır).

(Çağdaş bir Platonculuğa dayanan) çokluğun ontolojisinin bize öğrettiğiye tam tersine güçlüğün ve ayrıca *direncin* ardışıklıkta olduğudur. Düşünce için her gerçek sınamanın kökeni, ne kendinden önce gelenin sonsuz ikmaliyle *lehimlenmiş* ne de saçılımına özdeş olan ek bir adımın, başlatılamayan bir başlangıcın yeri tespit edilebilir zorunluluğundadır. Ek adım sınamasını öğrenmek ve bu sınamaya göğüs germek; zamanın hakiki zorunluluğu işte budur. Limit, kendisini oluşturan şeyin bir yinelenmesidir, “derinliği” aldatıcıdır, zira limit ordinal veya “limitteki” her türlü çokluk böyle bir “derinliğin” çağrışımıcı ve kof gücünü hiçbir *delik* içermemesinden alır. Ardılın gediği daha zorludur ve ger-

6 Osip Mandelştam:

Altın bir güneş gibi yükseliyor ayın kadehi
Yalnızca Yunancanın yankılanabileceği
Havada asılı görkemli bir an için
Evren avucunda bir elma gibi

Ayinin heybetli zirvesi
Kubbenin altında temmuz ışığı
Zamanın durduğu o sonsuz çayırlara doğru
Göğsünde zamanın dışından uzun bir iç çekiş

Aşai rabbani ayini sonsuz bir öğle vakti sürüyor
Herkes neşe içinde şarkılar söylüyor, kutsal ekmeği alıyor
Gözlerimiz önünde kadeh
Ruhlarımıza mutluluk yayıyor.

Mevcudiyetin ânı her türlü ısrarın, ardışıklığın ötesindedir. “Sonsuz öğle” zamanın zamansallık-ötesi limitidir. Burası şiirle kutsalın ortak yeridir.

Mandelştam’ın şiirlerinin hep bu yere yerleşmediğini belirtmek gerekir. Zira en güçlü şiirleri, çağı ve o çağın neyin ardılı olduğunu düşünmeye çabalar.

çekten derindir. Limitte, onu önceleyen şeydekinden daha fazla düşünülecek bir şey yoktur. Fakat ardılda, bir aşma vardır. Düşüncenin korkusuzluğu, tamamen limitin limitlediği durumda tutulan şeyi “limitine kadar” tekrarlamak değildir. Düşüncenin korkusuzluğu, hiçbir şeyin verili olmadığı bir boşluğu geçmektir. Bir şeyin ardından nasıl gelineceğini bir kez daha öğrenmemiz gerekir.

- 9.21 Temelinde, limitte güç olan şey, düşünceye sunduğu şey değil, *varoluşudur*. Ardışıklıkta zor olan şeyse varoluşu değil (çünkü boşluk temin edilir edilmez kaçınılmaz şekilde ardı sıra gelir), bu varoluşla birlikte düşüncede başlayan şeydir.

Ayrıca limit ordinalle ilgili olarak mesele daima, daha ısrarlı bir şekilde dönüp dolaşıp şuna gelir: Bir limit ordinal var mıdır? Boşluğun varoluşu koşuluyla 1, 2, 3,..., bütün ardıllar vardır. Fakat ya bir limit ordinal?

Okur anlamış olmalı: Sonsuz hakkındaki kararın kıyısındaız şu an. Bir limit ordinalin varlığını *kanıtlamak* için hiçbir umut yok. Büyük modern beyanı duyuramamız gerekiyor: Sonsuz vardır, üstelik her yerde banal bir şekilde vardır; ne vahyedilmiş (dinler) ne ispatlanmıştır (ortaçağ metafiziği), fakat sadece sayı biçiminde varlığın buyruğuyla karar verilmiştir. Bütün hazırlığımız sadece sonsuzun *sayı biçiminde* düşünülmesinin ne anlama geldiğini, gelebileceğini belirtmekten ibaretti. En azından sayının doğal ontolojik ufkuyla, yani ordinallerle ilgili olarak ne anlama geldiğini biliyoruz. Boş olmadığı halde ardıl olmayan şey sonsuzdur. Şunu duyurmanın vakti geldi:

Sonsuzluk aksiyomu. Bir limit ordinal vardır.

10. Yineleme veya tümevarım

- 10.1 Başlamadan önce biraz mola verelim: Matematiksel ontoloji hakkında bilgili bir felsefenin bakış açısından ordinallerin varlık olarak varlığa dair düşünceye ne sunduğunu özetleyelim.
- 10.2 Çoklu varlıklarının içsel istikrarı (ait olma ile içerilme, çokluk tarafından eleman sıfatıyla ilk “sunum” ile parça sıfatıyla içerilme tarafından temsil/yeniden sunum arasında maksimal özdeşlik) ve bunların içsel bileşiminin tam homojenliği (bir ordinalin bütün elemanlarının da ordinal olması) sayesinde ordinaller *doğal* çokluğun ontolojik şemasıdır.
- 10.3 Ordinaller bir küme oluşturmaz. Hiçbir çoklu-biçim onları bütünleştiremez. Doğal saf çokluklar var olsa da *Doğa yoktur*. Ya da Lacan gibi söyleyecek olursak: Tıpkı varlık olarak varlık gibi, Doğa bütün-olmayandır, çünkü bütün kümelerin kümesi diye bir şey yoktur.
- 10.4 Ordinallerin bizatihi varlığa çapa atması iki katmanlıdır.

Ordinaller zincirine varlığını temin eden mutlak ilk nokta, Hiçliğin sekülerleştirilmiş biçimi veya sa-

yı-biçimi olarak aksiyomla karar verilmiş boş küme, O 'dır. Bu biçim, varlık olarak varlığın durum-adıdır, her durum-içindeki-varlığın ve her dilin gizil varlığına dikilmesidir. Boş küme bir ordinal, dolayısıyla doğal bir çokluk olduğu için şunu ileri sürebiliriz: Her durumun varlık noktası doğaldır. Bu önerme materyalizmi temellendirir.

- 10.5 Ordinallerin varlığını Yunan sayısının (sonlu doğal tam sayılar; Yunan sayıları için bkz. 1. bölüm) ötesinde “yeniden başlatan” limit-noktası, sonsuz çokluğun sekülerleştirilmiş biçimi, dolayısıyla Bir’in dayatmasından tamamen eksiltilmiş olarak aksiyomatikle kararlaştırılmış birinci sonsuz küme, ω 'dır.

Bu bakış açısından ordinaller, doğal çokluğa dair *modern* (modern düşüncenin temel iki kararına uygun) ölçümün ölçeğini temsil eder. Bu modern kararlar, hiçliğin doğal ve sayılabilir bir varlık biçimi ve sonsuzun bir Tanrının Bir'inde hapsolmuş olmak şöyle dursun, doğada her yerde ve her durum-içindeki-varlıkta bulunduğunu söyler.

- 10.6 Ordinallerde *bizim* tuttuğumuz yol (veya temsilimizin limitleri) bunları bütünleştirilemez bir dizi olarak düzenler. Bu dizi O 'dan “hareket eder”. Varlık biçimi boşluğu terkip eden $((0),(0,(0)),(0,(0),(0),(0,(0))))$, vs. biçiminde) sayılar olan doğal tam sayılarla $(1,2,...,n,n+1,..., vs)$ devam eder. Doğal tam sayılar dizisinin ötesinde ilk sonsuz ordinal olan ω 'nin kaydedilmesine olanak veren “bir limit ordinal vardır” aksiyomunun temin ettiği sonsuz bir (yeniden) baş-

langıçla sürer. Bu başlangıç yeni bir ardıllar serisine olanak verir: $\omega, \omega + 1, \dots, \omega + n, \dots$, vs. Bu seri kendisinin ötesinde *ikinci* bir limit ordinalle kapatılır: $\omega + \omega$: bu da yeni bir ardıllar serisi başlatır, vs. Dolayısıyla kavranabilir hiçbir durma noktası olmadan konuşlanan ve sonluda olduğu gibi sonsuz boyunca da (ω 'nin ötesinde) seyreden bir ordinaller dizisi temsilimiz var.

10.7 Bu dizinin sıra düzeni ilkesi, bizzat ait değildir: W_1 ve W_2 gibi iki ordinal verildiğinde, ya $W_1 \in W_2$ ya $W_2 \in W_1$ ya da $W_1 = W_2$ olur. Düşüncede bizatihi çoklu-varlığı düzenlediği için tek ontolojik bağıntı olan ait olma aynı zamanda ordinaller serisini tamamen sıraya sokan şeydir. Böylelikle, W bir ordinally ve $S(W)$ onun ardılıysa, $W \in S(W)$ olur. n doğal bir tam sayıysa (sonlu bir ordinal) ve n' "daha büyük" bir tam sayıysa, $n \in n'$ olur. Herhangi bir doğal tam sayı n için, $n \in \omega$ (ilk sonsuz ordinal) olur, vs.

10.8 Üç tür ordinal vardır (boşluk ve sonsuzu zorunlu kılan modern kararlara göre):

- Boş küme, 0, ilk varlık noktasıdır.
- Ardıl ordinaller, önceline *bir* eleman, yani bizzat o önceli eklerler. W 'nin ardılını $S(W)$ ile gösteririz. $W, S(W)$ 'de maksimal elemandır ve maksimal bir elemanın varlığı ardılları tamamen içkin (seri yapısında değil) bir şekilde tanımlamamızı sağlar. Ardıl ordinaler "bir adım daha atma"nın anlamına dair bize sayısal şemayı sunar. Bu adım daima elimizde olan her şeye, bu her şeyin biricik işaretini eklemekten oluşur. "Bir adım daha" atmak, verilen çokluğun tamamını bir yap-

maya ve o biri çokluğa eklemeye denktir. Yeni durum “maksimalleştirilmiştir”: Bütün diğerlerine hükmeden bir terim içerir.

- Limit ordinaler hiçbir içsel maksimal elemana sahip değildir. Hiçbir durma noktası olmayan bir diziye özgü öteyi işaretlerler. *Hiçbir* belirli ordinalin ardından gelmezler, fakat limitini oluşturdukları dizinin *bütün* ordinallerinin ardından geldikleri söylenebilir. Bu dizinin hiçbir ordinali limit ordinale bir diğerinden “daha yakın” değildir. Zira dizinin her ordinaliyle limit ordinal arasına üçüncü bir ordinal ve nihayetinde (durma noktası olmayan seriye dair sezgisel anlamda) “sonsuz” sayıda ordinal gelir. Limit ordinal kendisinden önce gelen her şeye yapışır. Bu özellikle saçılımıyla özdeşliğinde ($L = \cup L$) kendini belli eder. Nedeni, limitin diziye *bütünleştirmesi*, ama dizide hiçbir belirli ordinali ayırt *etmemesidir*.

- 10.9 Bir limit ordinalin yapısal bakımdan (hem içsel bir maksimum hem de saçılım açısından) bir ardıl ordinalden farklı olması gibi, “limit alma” da “bir adım daha atmak”tan tamamen farklı bir düşünce işlemidir.

Ardışıklık genel olarak, limit almanın global işleminden *daha zor* olan yerel bir işlemdir. Ardışıklık, limite kıyasla daha fazla düşünülecek şey sunar. Tam tersinin söz konusu olduğu yönündeki çok yaygın his, “tamamen modern” olmadığımız için hâlâ sonsuzu ve limiti kutsallaştırmaya meyilli olmamızdan kaynaklanır. Yani bunları hâlâ Bir biçiminde düşünürüz. Bir ve kutsaldan eksiltilmiş, sekülerleştirilmiş bir dü-

şünce en zorlu meselelerin yerel meseleler olduğunu fark eder: “Nasıl ardından gelmeli?”, “Nasıl bir adım daha atmalı?”.

- 10.10 Ordinaler uzamı sonsuz ve sonluyu tanımlamamıza olanak verir. Bir ordinal, ait olmanın düzenlediği sıra düzeni zincirinde ω 'den önce geliyorsa sonludur. Eğer ω 'den sonra geliyorsa (ω dahil) sonsuzdur.

Dedekind'in sezgisine uygun olarak, ancak sonsuz bir ordinalin varlığının sonluyu tanımlamaya olanak verdiği burada tespit edilebilir. Modern düşünce birinci ve banal durumun sonsuz olduğunu ileri sürer. Sonlu ikinci durumdur ve çok özel, tekil, son derece enderdir. “Sonluluk” takıntısı kutsalın tiranlığının kalıntısıdır. “Tanrının ölümü” bizi sonluluğa değil, durumların her yerde mevcut sonsuzluğuna ve bununla bağlantılı olarak düşünülebilirin sonsuzluğuna götürür.

- 10.11 Ordinalerin, doğal önermesinde varlık olarak varlık üzerine düşünceye sunduğu şeye dair nihai sentetik özet burada tamamlanıyor. Şimdi varlığın bu hediyesini rasyonel bir şekilde katetme ve ona hâkim olma kapasitemize yönelmemiz gerekiyor. Yollardan biri, bu hudutsuz dokuda Sayının kesmesine doğru yol almaktır.

- 10.12 Doğal çoklukların tam anlamıyla hadsiz hudutsuz otoritesinin, yinelemeyle akıl yürütme denen, ayrıca tam tümevarım diye de adlandırılan ve sonlu ordinaler söz konusu olduğunda “sonluötesi tümevarım” denilen bu diyagonal ilerleyişe veya yargıya olanak vermesi öznel

sonluluğumuz için bir nimettir. Sonsuz (hatta ordinal-ler ele alındığında sonsuzca sonsuz) bir alan söz konusu olduğunda *sonuçlandırma anına* ulaşmamıza izin veren yegâne şeydir bu.

Bütün ordinallerin belirli bir P özelliğini taşıdığını ispatlamak istediğimizi varsayalım. Ya da “ x bir ordinalsse bütün x ’ler için, $P(x)$ olur” türünde evrensel bir önermeyi ispat yoluyla tespit etmeye çalıştığımızı. Nasıl ilerlemek gerekir? Önermenin doğru olduğunu tek tek doğrulamak elbette imkânsızdır. Böyle bir iş sonsuzca sonsuz olurdu. Ayrıca “ordinaler kümesi”ni düşünmek de mümkün değildir, zira böyle bir küme yoktur. “Bütün x ’ler için” ifadesindeki evrensel niceleyicinin içerdiği gibi “bütün ordinaler”, kendisinin “ordinaler kümesinin bütün elemanları” ifadesine dönüştürülmesine izin vermez. Böyle bir küme tutarsızdır (bkz. 6.11). Bu çıkmazın ortadan kaldırılması, yinelemeyle akıl yürütmenin işidir.

10.13 Yinelemeyle akıl yürütme *bir doğrulamayla bir çıkarımın kanıtlanmasını birleştirir*. Bu iki uğrağa ulaşıldığı anda ordinalerin öz yapısı evrensel sonuca olanak verir.

Özelliği P olarak adlandıralım. Boş küme 0 ’m bu özelliğe sahip olduğunu doğrulayarak başlarız; 0 “vakası”nda P ’yi test ederiz. Boş küme P özelliğine sahip değilse soruşturmaya devam etmek nafilidir. Bir ordinal, 0 , P özelliğine sahip olmadığı için bütün ordinalerin bu özelliğe sahip olduğu kesinlikle yanlıştır. Öyleyse $P(0)$ önermesinin doğru olduğunu, 0 durumunda testin olumlu olduğunu varsayalım.

Şimdi şu çıkarımı ispatlamaya çalışacağız: *Şayet herhangi bir W ordinalinden (ordinallerdeki ait olma şeklindeki tam sıralılığa göre) önce gelen bütün ordinaler P özelliğine sahipse öyleyse W de sahiptir.*

Bu çıkarımın bize P özelliğine sahip bir ordinalin *var olduğunu* söylemediğine dikkat edin. Çıkarım, genel “eğer x böyleyse, x ’ten sonra gelen de öyledir” türünde olan varsayım düzlemindedir. Gerçekte, çıkarım evrenseldir, hiçbir W ordinalini özel olarak belirtmez. Sadece bütün W ordinaleri için, ordinaler zincirinde kendisinden önce gelenlerin P ’yi doğrulaması halinde W ’nin de P ’yi doğruladığını kabul etmek zorunda olduğumuzu söyler.

W ’nin ardıl olduğu varsayıldığı durum ile limit olduğu varsayılan durumu ayırarak (W herhangi bir ordinal olduğu için bu ikisinden biri olabilir) bu ispatı (elbette P özelliğine bağlı olan böyle bir ispat mümkünse) çoğunlukla ikiye bölmek gerekecek. Yinelemeyle akıl yürütme, kendisini teşkil eden merkez çıkarımda gördüğümüz gibi, aslında bir W ordinali için geçerli olanı öncesinde gelen ordinaler için geçerli olana güçlü bir şekilde bağlar. Oysa bir limit ordinalin önceki ordinalerle ilişkisi (bir sonsuz yapışma ilişkisi) bir ardılın öncelleriyle ilişkisinden (kendisiyle önce gelen arasında bir gedik açar) tamamen farklıdır. İki durumda söz konusu olan düşünce ve ispat prosedürleri bu nedenle çok heterojendir. Bu heterojenliğin felsefesinin öngörmeye olanak verdiği üzere (bkz. 9.19), genelde daha zor olan durum ardıldır.

$P(0)$ önermesinin doğruluğunu teyit edebildiğimizi ve “ W ’den önce gelen (W ’ye ait olan: sıra düzeni

ait olmadır) bütün w ordinalleri için $P(w)$ doğruysa o halde $P(W)$ de doğrudur” çıkarımını ispatladığımızı kabul edelim. Bütün ordinallerin P 'yi doğruladığı sonucuna varabiliriz; bu “bütün” ifadesinin yalnızca sonsuzca sonsuz bir çokluklar enginliğini hedeflemediği, fakat bir Bütün bile oluşturmadığı gerçeğine rağmen. Bu gerçekten de “sözcük sözcük fethedilen”⁷ sonsuz ve tutarsızlıktır.

10.14 “Bütün”e böyle bir geçişe, bu kadar maceralı bir “sonuçlandırma ânı”na izin veren nedir? İzin, doğal çokluğun ontolojik şeması olarak ordinallerin temel bir özelliğinden gelir: ordinallerin “atomistik” niteliği ya da her P özelliği için (bir ordinal bu özelliğe sahip olduğu anda) bu özelliğin *minimal* bir dayanağının varlığı (bkz. 8.10 ve 8.15).

Sonuç yanlış olsaydı, yani bütün ordinallerin P özelliğine sahip olduğu hatalı olsaydı, bu, söz konusu P özelliğine sahip olmayan en az bir ordinalin var olduğu anlamına gelirdi. Bu durumda o ordinal P -değil özelliğine sahip olurdu; P -değil sadece “ P özelliğine sahip olmama, bir P -değil olma” anlamına gelir.

Fakat bir P -olmama özelliğine sahip bir ordinal varsa, atomistik ilke veya minimallik ilkesi gereği, *bu P -değil özelliğine sahip bir en küçük ordinal var olmalıdır*. P -değil özelliğine sahip en küçük ordinal olduğu için, ondan daha küçük her şey P özelliğine sahip olacaktır.

İtiraz sesleri yükselecektir: Bu “ondan daha küçük olanlar” belki de yoktur, zira P -değil özelliği için mi-

7 Mallarmé, “Le Mystère dans les lettres”. —çn

nimal ordinalin boş olması, hiçbir şeyin ondan önce gelmemesi mümkündür. Fakat hayır! 0'ın P özelliğine sahip olduğunu doğrulamış olduğumuz için (prosedürümüzün ilk uğrağıydı), P-değil için minimal ordinal 0 olamaz. Dolayısıyla ondan daha küçük ordinallerden bahsetmek mantıklıdır: Bunlar vardır ve hepsi P özelliğini taşır.

Halbuki ispatlandığı varsayılan merkez çıkarımımız tam da bir ordinalden daha küçük bütün ordinals P özelliğine sahipse o ordinalin de bu özelliğe sahip olması gerektiğini söyler. Böylelikle biçimsel bir çelişkiye varmış oluruz: Bu farazi minimal P-değil, bir P olmalıdır. Dolayısıyla var olmadığı ve bütün ordinalsın P özelliğine sahip olduğu sonucuna varmak gerekir.

Böylelikle doğal çoklukların ontolojik altyapısı, yinelenmenin meşruluğunu tesis eder. Doğrulamamız (0 durumu) ve ispatımız (eğer her $w \in W$ için $P(w)$ ise o halde $P(W)$), şayet mümkünse (bu, P'ye ve... matematiksel uzmanlığımıza bağlıdır), "bütün ordinals" için sonuca varmaya izin verir.

10.15 Peano'nun aksiyomatığını incelerken (bkz. 5.3) yinelenmeyle akıl yürütmenin, doğal tam sayıların bize bir örneğini verdiği *seri yapılı* sayısallığın temel bir verisi olduğuna dikkat çekmiştik. Bunun, ordinalsın oluşturduğu bu "evrensel seriye" genişlemesi olağandır. Fakat aradaki büyük fark, tümevarım ilkesinin veya yinelenmenin, Peano'da olduğu gibi aksiyomatik bir biçim veya formel bir düzenleme olmaktan çok, varlıkta (saf çokluk teorisinde) temellendiği için burada bir *teorem*,

dolayısıyla ordinallerden *tümdengelimle* çıkarsanabilir bir özellik olmasıdır.

Her türlü bütünleştirici düşünceden kaçan doğal çokluğun yine de kendisini tümevarımsal şema denen o entelektüel “kavrama”ya sunması, onun özünde vardır. Burada da yine varlığın, tek bir şeyin (burada 0) doğrulanması ve “önce” gelenin (bir ardıl ordinal ya da bir limit ordinal olmasına göre öncel veya sonu olmayan seri) özelliğini “sonra” gelene aktaran bir prosedürden hareketle “bütün”e dair netice olan Sayı biçimindeki düşünce için elverişli olduğu ortaya çıkar. Sayı, varlığın düşünce karşısındaki onarılamaz fazlalığına rağmen varlığı düşünceye veren şeydir.

10.16 Yinelemeyle akıl yürütme, ordinalleri ilgilendiren evrensel önermelerin ispat prosedürüdür. Sonuca ulaşmaya olanak verir. Yinelemenin veya sonluötesi tümevarımın *kavram mertebesine erişmesini* sağlayan daha önemli bir kullanımı vardır. Bunlar, *tümevarımsal tanımlardır*.

Düşüncemizin amacının, şu veya bu çoklukların, örneğin ordinallerin bir P özelliğine sahip olduğunu ispatlamak değil, *daha sonra* çokluklar üzerinde test edebilecek şekilde bir P özelliği tanımlamak olduğunu varsayalım. Bu sorunun iyi bilinen bir güclüğü, *dilde tanımlanmış bir özelliğin saf çokluğa tutarsızlıkla sonuçlanmadan “uygulanabilir” olup olmadığını peşinen bilmememizdir*. Örneğin “kendisinin elemanı olma” özelliğinin hiçbir var olan kümeyi belirlemediğini ve bunun biçimsel bakımdan mükemmelen doğru olmasının, sınırsızca kullanıldığında tutarsızlık sonu-

cu ispatlayıcı düşüncenin tamamını mahvedebildiğini görmüştük (bkz. 2.11). Dil tek başına bunları destekleyemiyorsa, kısıtlamalar ve garantiler nasıl getirilir? Yinelemeyle tanımlama veya tümevarımsal tanımlama prosedürü bu soruyu yanıtlar.

10.17 Bu kez prosedürün meşruluğunu temellendirecek olan, ordinallerde bir Bütün varsayımının içerdiği tutarsızlık riskine maruz kalmadan P özelliğini *ardıl seviyelerle* tanımlamamıza olanak veren bir tür evrensel ölçeğimizin olmasıdır. Tümevarımsal tanımlama, kavramın bir *dallanıp budaklanmasıdır*: P özelliği “genel olarak” değil, daima bir seviyede endekslemeyle tanımlanacaktır ve bu endekslemenin işlemcileri ordinaller olacaktır. Burada yine varlık, saf çokluk olarak varlığın alanının her bakımdan aştığı düşüncemize aşama aşama ve parça parça ilerleyebileceği garantisini vererek sonlunun yardımına koşar.

10.18 Üç tür ayırt eden (boşluk, ardılar, limitler) ordinalerin tipolojisine uygun olarak prosedürümüz de üçe ayrılır.

- Önce dilin bir ifadesini kullanarak özelliğin 0 seviyesi *açık bir şekilde* tanımlanacaktır. Açık bir şekilde tanımlama *önceden* tanımlanmış bir özelliğimiz olduğunu (Q ile gösterelim) ve P'nin 0 seviyesinin (P_0 ile gösterelim) Q'ya *denk olduğunun* olumlanabileceğini varsayar. Böylelikle: $P_0(x) \leftrightarrow Q(x)$.

- Daha sonra, eğer P'nin W seviyesi (P_w ile göstereyim) tanımlanmışsa, *bu durumda* S(W) seviyesi ($P_s(w)$ ile gösterelim) belirtilen bir açık prosedürle tanımlanır.

P_w 'nin tanımlanmış olduğunu söylemek, R diye adlandıracağımız ve P_w 'ye denk olacak bir özelliğin var olduğunu söylemektir: yani $P_w(x) \leftrightarrow R(x)$. P_w 'nin tanımından $P_s(w)$ 'nin tanımına geçişin açık bir prosedürünün var olması, P_w 'yi tanımlayan R 'den $P_s(w)$ 'yi tanımlayacak bir $f(R)$ özelliğine geçişi sağlayan bir f fonksiyonu olduğu anlamına gelir. Son olarak, " $x, P_s(w)$ özelliğine sahiptir" demenin, " $x, f(R)$ özelliğine sahiptir" anlamına geldiğini söyleyebileceğiz; burada P_w 'nin tanımından $P_s(w)$ 'nin tanımına "geçiş"e izin veren f , R üzerinde kesin olarak tespit edilmiş açık bir işlemdir.

- Son olarak, *eğer* L ile göstereceğimiz bir limit ordinalden küçük bütün P seviyeleri tanımlanmışsa ($P_0, P_1, \dots, P_n, P_{n+1}, \dots$, ile gösterelim), *bu durumda* P 'nin L seviyesi (örneğin P_w ile gösterelim) tüm önceki seviyeleri tanımlayan şeyin açıklanabilir olan bir "bir araya getirilmesi"yle tanımlanır (burada birleşim kümesi veya saçılım, 9.17'de açıkladığımız nedenlerle genelde belirleyici bir rol oynayacaktır). Çoğunlukla şöyle bir şey elde ederiz: Belirli bir x için, L 'nin alt bir seviyesi (w ile gösterelim; $w \in L$) $P_w(x)$ olacak şekilde doğrusa $P_L(x)$ doğrudur. Özüne uygun olarak limit seviyesi, altındaki bütün seviyeleri üstlenecek ve yeni hiçbir şey getirmeyecektir.

Böylelikle elimizde sadece P kavramı değil, dallanıp budaklanan bir sonsuzca sonsuz kavramlar ailesi vardır: açıkça tanımlanmış P_0 'dan itibaren başlayıp, $P_n, P_\omega, P_{\omega+n}$, vs. üzerinden daha önemli olan P_w ordinal endekslemelerine kadar. Bu durumda biricik kavram olarak P kavramının *sonluötesi tümevarımla tanımlandığını* söyleyeceğiz. Şu anlamda: Belirli bir x için $P(x)$ ancak ve

ancak x , W seviyesinde özelliğe sahip olacak şekilde bir W ordinali varsa doğru olacaktır. Bu durumda aşağıdaki denklik elde edilecektir: $P(x) \leftrightarrow "P_w(x) \text{ olacak şekilde bir } W \text{ varsa}"$.

Dolayısıyla kavrama tümevarımsal hâkimiyet, ordinal dallanıp budaklanması, daha sonra “ P kavramı x için geçerlidir” ile “ P kavramı, kavramın W seviyesinde x için geçerlidir” arasında bir denklikle kurulur. Bu denklik *herhangi bir Bütün bahsinden kaçınır*. P özelliğini “genel olarak” değil, *bir* seviyede test eder; bu da onu paradokslar ve tutarsızlıklara karşı korur.

10.19 Hem içsel (saf çokluk teorisinin veya ontolojinin genel yapısına parlak bir ışık tutar: varlık olarak varlıklarında düşünüldüğünde çoklukların katman katman olduğunu gösterir) hem de yöntembilimsel (kavramın tanımında seviyelerin işleyişini açık bir şekilde görürüz) olan çok önemli bir örnek vereceğim.

Temeldeki fikir, her çokluk için ordinallere endekslenmiş olan ve bir şekilde boş küme denen o ilk dikişe “mesafe”sini ölçen ontolojik bir *mertebe* tanımlamaktır. Mertebenin, bir kümenin *karmaşıklığının*, kümeyi oluşturan boşluğun anlarının içkin dolanıklığının bir ölçümü olduğu da söylenebilir.

Doğal olarak “bütün” kümelerden bahsetmek imkânsızdır; bunun için bunları bütün kümelerin kümesinde bir araya getirmek gerekir ve bu da tutarsızdır. Tümevarım prosedürünün kademe kademe ilerleyen ihtimamı zorunlu hale gelir.

Küme teorisinde bir kümeden bir diğerine “geçmeye” olanak veren iki büyük işlem şunlardır:

- Birleşim ya da ilk baştaki kümenin elemanlarının elemanlarından oluşan küme. Daha önce karşımıza çıkan saçılım işlemi (bkz. 9.15). Bir E kümesi söz konusu olduğunda bu kümenin birleşimini $\cup E$ ile gösteririz.

- Baştaki kümenin bütün parçalarını, o kümede içerilen bütün her şeyi “kümelemek”ten, bir yapmaktan oluşan parçalar kümesi (ait olma ve içerilme için, bkz. 7.3). E ’nin parçalarından oluşan kümeyi $p(E)$ ile gösterelim. $p(E)$ ’nin elemanlarının E ’nin parçaları olduğuna dikkat edin; $e \in p(E)$, $e \subset E$ anlamına gelir.

Mertebeler hiyerarşisini bu iki işlem aracılığıyla inşa edeceğiz. 10.18’de açıklanan yöntem uyarınca sonluötesi tümevarımla tanımlanması gereken özellik $R(x)$ olarak gösterilecek ve “ x , bir mertebeye sahiptir” şeklinde okunacaktır (veya “ x sağlam temellidir”). Üç aşamamız aşağıdaki gibi olacak:

1) 0 seviyesinde özelliğin açık tanımı. $R_0(x)$ ’in hiçbir x için doğru olmadığını, yani $R_0(x)$ ’in $x \in 0$ ’a denk olduğunu koyutlayacağız.

2) Ardıl seviyelerin üniform bir şekilde ele alınması. $R_{S(w)}(x)$ ’in ancak ve ancak x , R_w ’yi doğrulayan bütün z ’ler tarafından oluşturulan kümenin parçalarının kümesine aitse doğru olduğunu koyutlayacağız. Başka bir deyişle, $S(w)$ ardıl düzeyindeki mertebe, w öncelinin endekslediği seviye için tanımlanmış mertebenin parçalarının kümesidir. Bu da şöyle yazılabilir: $R_{S(w)}(x) \leftrightarrow ((y \in x) \rightarrow R_w(y))$: x , $R_{S(w)}$ için doğruysa, x ’in elemanları R_w için doğrudur ve sonuç olarak x , R_w için doğru olan kümelerin kümesinin bir parçasıdır. Aynı zamanda, $R_w(x)$ ’i doğrulayan x ’ler kümesini R_w ile göstererek, şöyle de yazabiliriz:

$$(x \in R_{S(w)}) \leftrightarrow (x \subset R_w) \leftrightarrow (x \in p(R_w))$$

3) *Limit seviyelerinin üniform bir şekilde ele alınması.* Beklendiği gibi burada birleşim kümesi kullanılır. Eğer x , endeksi L 'den daha küçük bir mertebedeysen, dolayısıyla $R_w(x)$ doğru olacak şekilde bir $w \in L$ varsa $R_L(x)$ 'in doğru olduğunu söyleyeceğiz. Dolayısıyla R_L mertebesi, alt mertebelerin bütün elemanlarını bir araya getirir: bu mertebelerin birleşimidir. Yukarıdaki aynı uzlaşımları kullanarak şöyle yazabiliriz: L 'den küçük bütün w 'ler için, $(x \in R_L) \leftrightarrow x \in \bigcup R_w$.

Böylelikle R özelliği tamamen tümevarımla tanımlanmış olur. $R_w(x)$ doğru olacak şekilde bir w ordinali (ardıl veya limit) varsa $R(x)$ 'in (endekssiz) doğru olduğunu veya x 'in bir mertebesinin olduğunu söyleyeceğiz. Bu özellik, x 'in karmaşıklığına (özellik R_0 düzeyini tanımlayan) O 'dan hareket ederek, birleşimin ardışık kullanımı ve parçalara geçiş kullanımıyla ulaştığımızı "gösterir". Bu kullanımların "uzunluğu" bir ordinalle ölçülebilir: $R_w(x)$ 'in doğru olmasını sağlayan en küçük ordinal w .

10.20 Bununla birlikte, bu prosedürün gerçekten de "işliyor" olup olmadığı, P özelliği diye bir şeyden bahsetmenin bir anlamı olup olmadığı aşikâr değildir. Doğal varlığın cömertliği, kavramın bu dallanıp budaklanmış belirleniminin fiilî karakterinin *ispatlanmasının* mümkün olmasıyla alakalıdır.⁸

Dolayısıyla düşünce, var olmayan ama ölçülebilir aşamalar veren Doğanın birbirine dolanık ve hiyerarşik

8 Tümevarımsal tanımların geçerliliğinin ispatı için, bkz. K. J. Devlin, *Fundamentals of Contemporary Set Theory*, Springer-Verlag, 1980, s. 65-70 ("The recursion principle").

evrensel egemenliğinde varlığın yolundan ilerler. Sayı, böyle bir yolun yasasıyla bizim için erişilebilir olur ve aynı zamanda ordinallerde görmüş olduğumuz gibi bu yolun kendisi için norm oluşturur. Sayı, varlığın düşünceyi *düzenleyen* yanıdır.

11. Doğal tam sayılar

11.1 Ordinaler bize doğrudan Yunan sayılarını verir: doğal tam sayıları. Hatta matematikçilerin –her zamanki gibi adlandırmalarının semptomatik inceliğiyle– sayıların sivil haline ekledikleri “doğal” sıfatına yeni, Antik Yunan’a ait olmayan bir meşruluk bile verebilecek durumdayız: “Doğal”dırlar, çünkü sonluda dosdoğru saf doğal çoklukların ontolojik şeması olan ordinallerle örtüşürler.

Gerçekten de varlığında sayının yerinin (yani: tam sayının yerinin) –Dedekind’in “düşüncemin bütün olanaklı nesneleri” düşüncesinden hareketle varlığını güvence altına almak için nafile uğraştığı yer– “bir limit ordinal vardır” aksiyomunu öne sürerek varlığın modern buyruğuyla var olduğuna karar verdiğimiz ilk sonsuz ordinal ω ile özdeşleştirilmesi “doğal”dır.

11.2 ω ’nin tam sayının yeri olduğunu söylemek, küme teorisinde kesin bir anlama sahiptir: Yeri “işgal eden” şey, ona ait olandır. Bir ordinalden önce gelen bütün ordinaler o ordinale ait olmakla kalmaz, başlangıçtaki ordinalin *bütün* elemanlarını da oluştururlar.

Ashına bakılırsa, ordinallerdeki tam sıralılığın ait olma olduğunu biliyoruz (bkz. 8.10). Bunun sonucun-

da, belirli bir W ordinalinden daha küçük bir ordinal tam da W 'ye ait olan bir ordinaldir. Bir ordinalin (örneğin ω 'den daha büyük bir ordinalin) imgesi şöyledir:

$$0 \in 1 \in 2 \in \dots \in n \in n+1 \in \dots \in \omega \in \omega+1 \in \dots \in W$$

Burada ait olma zincirinin bütün üyeleri tam da W 'nin elemanlarını oluşturur. Böyle görselleştirildiğinde W ordinali, “uzunluğu” tam olarak W olan bir “iç içe geçmiş” ordinaller dizisi olarak görünür. W 'ye varmak için zincirin W sayıda halkası vardır. Tam olarak W ordinal (kendisinden önceki her şey) içeren bir W ordinalini aynı zamanda *adı olduğu şeyin sayısı olarak* da görebiliriz. Bu da, öncellerinin ısrar ettiği yerle –bu ısrarın bir araya getirilmesi olarak– özdeşleştiğini söylemenin başka bir yoludur.

Öyleyse doğal tam sayıların tanımı berraktır: *Bir ordinal eğer ilk limit ordinal ω 'nin bir elemanıysa, bir doğal tam sayıdır. Sayının yerinin yapısı bu durumda şöyledir:*

$$0 \in 1 \in 2 \in \dots \in n \in n+1 \in \dots \in \omega$$

Yerin adı olan ω 'nin, bu yerin parçası olmadığına dikkat göstermek gerekiyor, çünkü hiçbir küme kendisine ait olamaz (bkz. 8.14). Tam sayının yeri, ω , bu yerin bir elemanı olmadığı için *bir tam sayı değildir*. ω ilk limit ordinal olduğu için, elbette boş küme 0 hari-cindeki bütün tam sayılar ardıldır.

- 11.3 Dikkatli bir okur şöyle itiraz edebilir: ω 'nin ilk limit ordinal olduğunu söylüyorum. Fakat bir “ilk” limit ordinalin var olduğundan emin miyim? Sonsuz aksiyomu (bkz. 9.20) sadece şunu söyler: “Bir limit ordinal var-

dır". Bu ordinalin "ilk" olup olmadığını belirtmez. ω 'yi "ilk limit ordinal" veya ilk sonsuz ordinal olarak adlandırmamıza izin veren nedir? "Bir limit ordinal vardır" dediğim anda "ilk" denebilecek bir ordinalin olmadığı bir kalabalığın ortaya çıkması gayet mümkündür. Böyle ordinallerin sonsuz azalan bir zinciri olabilir; örneğin, hiçbir ilk terimi olmadığını gördüğümüz negatif sayıların azalan zincirindeki gibi: Hiçbir negatif tam sayı "en küçük" tam sayı değildir; benzer şekilde hiçbir pozitif tam sayı "en büyük" tam sayı değildir (bu ikinci husus ise, pozitif sayılar dizisinin yerinin ötesinde bulunan ω 'nin bir limit ordinal olduğunu söylemeye denktir).

Fakat ilk limit ordinali biricik ve mükemmel bir şekilde belirleyemezsem, tam sayılara dair tanımına ne olur?

- 11.4 Bir kez daha doğal çoklukların minimallik denen o harika ilkesi sayesinde bu itirazı savabiliriz. Bir P özelliği verildiğinde *eğer* bu özelliğe sahip bir ordinal varsa, *o halde* bu P özelliğine sahip sadece ve sadece tek bir minimum ordinal olduğunu, yani bu özelliği taşıyan bir en küçük ordinal olduğunu biliyoruz. "Bir limit ordinal olma" özelliğini alalım. Bu özelliğe sahip bir ordinal mutlaka vardır, zira sonsuz aksiyomu tam da bunu dile getirir. Öyleyse bu özellik için minimal tek bir limit ordinal vardır. Sonuç olarak güvenli bir şekilde bu özellik için "ilk limit ordinal" veya "limit ordinallerin en küçüğü" diye bir şeyden bahsedebiliriz; ω özel adını zaten bu eşsiz ordinale veriyoruz. Dolayısıyla doğal tam sayılara dair tanımımızda hiçbir muğlaklık yoktur.

11.5 1, 2, n , vs. türü gösterimlerin, sadece boşluktan örülü çokluklara işaret etmeye yarayan, şifreleme [*chiffre*] anlamında *rakam*/*şifre* [*chiffre*] olduğunu asla unutmamalıyız. 1'in aslında boşluğun tekliği, yani (0), ikinin boşluk ve boşluğun tekliğinden oluşan çift, yani (0,(0)), üçün boşluk, boşluğun tekliği ve boşluk ile boşluğun tekliği çiftinden oluştuğunu, yani (0,(0),(0,(0))) olduğunu daha önce öğrenmiştik (bkz. 8.3). Boşluğun kendisiyle örgüsünü sergilemek için 4 rakamının gerçek varlığını da yazalım: (0,(0),(0,(0)), (0,(0), (0,(0)))).

4'ün dört elemanlı bir küme olduğu açıkça görülüyor; sırasıyla 0, (0), (0,(0)) ve (0,(0), (0,(0))). Bu dört eleman yakından tanıdığımız sıfır, 1, 2, 3'ten başkası değildir. Bir tam sayının elemanları tam da söz konusu sayıdan önce gelen bütün sayılardır; hiç şaşırtıcı değil, çünkü her ordinalin en içteki yapısının böyle olduğunu yukarıda göstermiştik (bkz. 11.2). Şöyle yazabiliriz: $4=(0, 1, 2, 3)$. Daha önce belirtmiş olduğumuz gibi, 3'ten 4'e (benzer şekilde n 'den $n+1$ 'e) geçmek için 3'ün elemanlarına (benzer şekilde n 'nin elemanlarına) 3 sayısının kendisi (n sayısı) "eklenir". Ordinalerde ardışıklığın genel tanımı (bkz. 9.6) böyle olduğu için bunda da şaşırtıcı bir yan yoktur.

Ne kadar büyük olursa olsun herhangi bir n tam sayısından ilk limit ordinal olan ω 'ye "geçmek" için ardışıklık prosedürünü kullanmak elbette imkânsız olacaktır. Tekrarlamak gerekirse bunun nedeni ω 'nin bir tam sayı değil, tam sayıların yeri olmasıdır. Burada *ardışıklığın yerinin kendisinin ardıl olmadığını* ifade eden düşüncenin önemli bir yasası yürürlüktedir (Bilincin "son" figürü olduğu varsayılan Hegel'in Mutlak Bilgi figürünün bu yasayı ihlal ettiğini de bu arada belirtelim).

11.6 Doğal tam sayıların yeri, sonluda sadece boşluğu ören tam sayıların çoklu-varlığı ve *bizim* bu sayılarda ilerleyişimizin yasası olarak ardışıklık yasası elimizin altında olduğunda, 10. bölümde açıkladığımız ve doğal varlık bakımından meşrulaştırdığımız tümevarımsal veya yinelemeyle tanımlamanın genel ilkesinden kaynaklanan basit teknik manipölasyonlarla klasik işlemlerimiz (örneğin toplama ve çarpma) tekrar karşımıza çıkar. Buna yeni bir örnek vermenin zamanıdır.

11.7 Belirli bir sayı, örneğin 4'ü ele alalım. Tümevarımla, anlamı şu şekilde olacak bir F fonksiyonu tanımlamak istiyoruz: Herhangi bir n sayısı için (dolayısıyla *bütün* tam sayılar için: ki sonsuz tam sayı vardır) $F(n)$, $4+n$ toplamına eşittir. Bunun için elimizde sadece bir işlemci bulunuyor: ordinal ardışıklığı. Zira bildiğimiz tek şey, 0 hariç bütün tam sayıların ardıl olduğu. Tam olarak 10.18'de açıklanan şemaya göre ilerleyeceğiz; tek fark limit ordinaler (ω 'den önce limit ordinal yoktur) için endişelenmemize gerek olmaması. n tam sayısının ardılı her zaman olduğu gibi $S(n)$ ile gösteriyoruz.

- Önce şunu ifade edeceğiz: $F(0)=4$ (temelindeki sezgi $4+0=4$ şeklinde olan tamamen açık bir değer).

- Daha sonra ardıllıkla ilerleyen tümevarıma geçeceğiz: $F(S(n)) = S(F(n))$. $S(n)$ için fonksiyonun değeriyle n için değeri arasındaki kurallı ve üniform bir bağıntı ve sadece bildiğimiz, ordinaler üzerinde genel olarak tanımlanmış ardışıklık işlemini kullanan bir bağıntı. $n+1$ 'i n 'nin ardılı olarak gösteren alışıldık "hesaplama" notasyonumuzu kullanırsak bunun temelindeki sezgi $4+(n+1) = (4+n)+1$ şeklindedir.

Fonksiyonun değeri tamamen bu iki denklemle tanımlanır. Örneğin $F(2)$ 'yi hesaplamak isteğimizi varsayalım. Aşağıdaki mekanik diziye elde ederim:

$$F(0) = 4$$

$$F(1) = F(S(0)) = S(F(0)) = S(4) = 5$$

$$F(2) = F(S(1)) = S(F(1)) = S(5) = 6$$

Böyle bir şemanın, sadece ardışıklık işlemcisinden hareketle yineleme yoluyla gerçek bir *toplama işlemi* tanımı olduğu açıkça görülüyor. Toplamaya dair genel bir tümevarımsal şema elde ettikten sonra çarpmayı da tanımlayabiliriz. Tanımlanacak fonksiyon değeri n 'nin 4'le çarpımı olan $P(n)$ olsun. Bu sefer 0 ile değil 1 ile tümevarıma başlayacağız ve eğer $F(n)$ yukarıdaki gibiyse (yani $4+n$ tümevarımsal olarak tanımlanmışsa) şöyle diyeceğiz:

$$P(1) = 4 \text{ (yol gösteren sezgi: } 4 \times 1 = 4 \text{)}$$

$$P(S(n)) = F(P(n)) \text{ (yol gösteren sezgi:}$$

$$4 \times (n+1) = 4 + (4 \times n) \text{)}$$

Bu teknik manevraların bizim için doğrudan bir önemi yoktur. Sadece, varlıklarında düşünülen tam sayıların (yani boşluğun sonlu kombinasyonlarını ören ve ω 'den önce gelen ordinaller) tam da çağın gereğince sayıp hesaplar yapmada kullandığımız sayılarla aynı olduğuna ikna etmeye yararlar.

- 11.8 Tam sayıların matematiksel-felsefi yeniden inşası böylelikle tamamlanır. Ne kavramdan türetilirler (Frege) veya içinde bulundukları yer olanaklı düşüncemizden çıkarsanabilir (Dedekind) ne de yasaları keyfî olarak

aksiyomatikleştirilmiş işlemsel bir alanın yasasıyla kısıtlıdır (Peano). Sonsuz üzerine bir kararın geriye doğru işlemesiyle, daha ziyade sayının bize varlığı *doğal ve sonlu* figüründe verdiği kısmıdır.

Tam sayılar, düşünceye sadece *sonlu için kapasite*sinin kısıtlı kapsamını teşhir etmesi ölçüsünde bizzat Doğadır. Bu teşhir sadece bir sonsuz nokta, tam sayının varoluşsal teminatı olan ω limit ordinal koşuluyla mümkündür. Söz konusu sonsuz noktası, tam sayıya kıyasla engindir, zira ardıl tekrardan eksiltilmiş olarak tam sayının eksiksiz tatbik yerini, içsel hiçbir sınır içermeyen (ardışıklık *her zaman* devam edebilir) yeri tesis eder. Bununla birlikte sonsuz doğal varlığın, ilk terimi olan ω 'nin ötesinde her yeri kaplaması karşısında minik kalır. Tam sayı, varlık olarak varlığın boşluk ile ilk sonsuz arasında konuşlandığı sonlu “neredeyse hiç”in varlık biçimidir.

- 11.9 Sadece sağlam bir temeli olmayan bir öngörüyle ve eskiliklerine hürmeten doğal tam sayıları “sayılar” olarak adlandırıyoruz. Henüz sayıya dair genel bir kavramımız olmadığı için ordinallerin sayı olduğunu öne sürmenin gayrimeşru olduğuna daha önce işaret etmiştik (bkz. 8.8). Halbuki tam sayı dediğimiz, ordinallerden başka bir şey değildir. Ama sayı ya da daha ziyade Sayı, saf çokluğun ordinalleri aşan varlığının bir türünü tanımlar. Söz konusu varlık türünün, her sayı türü (tam sayılar, bağıl sayılar, rasyonel sayılar, reel sayılar, ordinaller, kardinaler) için tespit edilebilir şekilde ortaya çıkarılmamış olması nedeniyle, sadece işlemsel sezgi-

sinden veya bu gösterenin tarihsel kalıtımından hâlâ pek kurtulmamış bir anlamda “sayı”dan söz ederiz.

Fakat hazırlıklarımız şimdi tamamlandı. Yunan sayılarına hürmet, önce şecereyle ilgili olan, sonra da kavramsal bir niteliğe sahip büyük bir girişin sadece son durağıdır. Şimdi Sayıyı *tanımlamak* gerekiyor.

3

Sayının Ontolojisi

Tanım, Sıralılık, Kesim, Türler

12. Sayı kavramı: Olaysal bir adlandırma

12.1 Bu kitabın birinci kısmı tarihsel ve eleştireldi (önceki büyük girişimlerin incelenmesi). İkinci kısmı konstrüktif ve kavramsaldı (geçişli küme kavramından hareketle ordinallerin doğal çokluğun şeması olarak belirlenmesi). Bu üçüncü kısımda aksiyomatik bir şekilde ve geriye doğru ilerleyeceğiz: Sayının genel bir tanımından, yalnızca ordinal kavramını kullanacak olan hayli basit bir tanımdan hareket edeceğiz. Daha sonra, tekilleştirici bir yaklaşımla, böylece tespit edilmiş Sayı kavramının temel niteliklerine yöneleceğiz: tam sıralılık, kesim yöntemi ve nihayet en son sırada işlemler. Bunlara değinirken aynı zamanda tüm klasik sayıların (tam sayılar, rasyonel sayılar, reel sayılar ve sayı olarak kavranan ve kullanılan ordinallerin kendisi) nasıl genel kavramımızın *tikel durumlarından* ibaret olduğunu göstereceğiz.

Bana göre bu yaklaşımın en önemli üç özelliği şunlardır:

1) Sıralılık ve işlemler üzerine düşünceler, Sayının içsel veya ontolojik tanımından doğar. Dolayısıyla Sayının kendisi işlemsel bir kavram değil, yapısal ve içkin

tarzda düşünölmeye izin veren, saf çokluğun tikel bir figürüdü. İşlemsel boyutlar sadece sonra gelen özelliklerdir. Sayı inşa edilmez, bilakis onu dahil ettiğimiz bütün inşaları mümkün kılan Sayının öz varlığıdır.

2) Ordinaler Sayının tanımının temel malzemesini, doğal ontolojik ufkunu tesis eder. Fakat tüm genelliğinde alındığında Sayılar bu doğal malzeme üzerinde “doğal olmayan” neticelerdir.

3) Klasik sayılarımız, Sayının genel ve birleşik kavramına dahil olsalar da bu kavramı hiçbir şekilde tüketmeyen çok özel durumlardır. Henüz düşünmediğimiz veya kullanmadığımız kadar sayısız enginlikte Sayı vardır.

12.2 *Tanım:* Bir ordinal ile bu ordinalin bir parçasının müşterek verilmişliğini Sayı olarak adlandırıyoruz.

Sayıları N harfiyle göstereceğiz ve iki veya daha fazla Sayıyı ayırt etmek gerektiğinde N 'nin arkasına bir indis koyacağız.

Başka bir deyişle, bir N Sayısı şu ikisinden oluşur:

- bir W ordinali;
- bu ordinalde iççerilen bir altküme, yani $F \subset W$.

Ordinal, Sayının *maddesi* olarak adlandırılacak ve $M(N)$ ile gösterilecektir.

Ordinalin parçası, Sayının *biçimi* olarak adlandırılacak ve $F(N)$ ile gösterilecektir.

Maddede olup biçime alınmamış olanlar, dolayısıyla W ordinalinin $F(N)$ parçasında olmayan elemanları Sayının *atığını* oluşturur. Atığı $D(N)$ ile göstereceğiz. Atık, maddeden biçimin çıkarılmasına, yani $M(N) - F(N)$ kümesine eşittir.

B biçimle atığı birleştirirsek maddenin tamamını bulduğumuz açıkça görülüyor. Dolayısıyla birleşim kümesini $\cup$ ile gösterirsek (bkz. 9.15): $F(N) \cup D(N) = M(N)$.

Bir Sayı tamamen maddesi (bir ordinal) ve biçimi (bu ordinalin bir parçası) tarafından belirlendiği için bir $(M(N), F(N))$ çifti olarak yazmak genelde pratik olacaktır. Burada daima ordinal-madde sola ve biçim sağa yazılacaktır.

12.3 Bu tanımları incelerken okur birkaç şeye dikkat göstermelidir.

1) Şu an için *a priori*, saf bir tanım söz konusudur ve bu tanımda şu veya bu tanıdık sayımızı hemen “ayırt etme”yi istemek ne faydalı ne de mümkündür.

Bir örnek vereyim: Madde olarak 1 ordinalini (ontolojik bileşimi (0), yani boşluğun tekliğidir) ve biçim olarak, her kümenin parçası olduğu gibi (bkz. 7.9) 1’in de bir parçası olan 0 ordinalini veya boşluğu alalım. Yukarıdaki uzlaşım uyarınca Sayımız $N = (1, 0)$ şeklindedir. Tanıma (bir ordinal ve bu ordinalin bir parçasının verili olması) uygun olarak sadece N ’nin *bir sayı olduğunu* biliyoruz. “1” ve “0” göstergeleri doğrudan hiçbir Sayıya referans değildir, çünkü Sayıların söz konusu olduğunu daha hiçbir şekilde saptamadık. Gerçekte her biri kendi adına bir madde ve bir biçime işaret etmesiyle bu 1 ve 0 göstergeleri *Sayılar olarak sunulmazlar*, çünkü bunların yazımında her Sayının *ikili* temel verilmişliğini –bir madde ve bir biçim– ayırt edemeyiz. Bir Sayı iki işaret, maddesinin ve biçiminin işaretini taşımak *zorundadır*: halbuki “0” gibi “1” de sadece bir işarettir. Dolayısıyla 1 veya 0’ı

“tanıdığımız” gerekçesiyle ne olursa olsun (1, 0) Sayısında herhangi bir alışıldık sayıyı “tanımak” tamamen aldattıcıdır. Şu an için (1, 0) ile sadece tanımda tespit edildiği haliyle Sayı kavramına uygun olan soyut bir Sayı örneğimiz vardır.

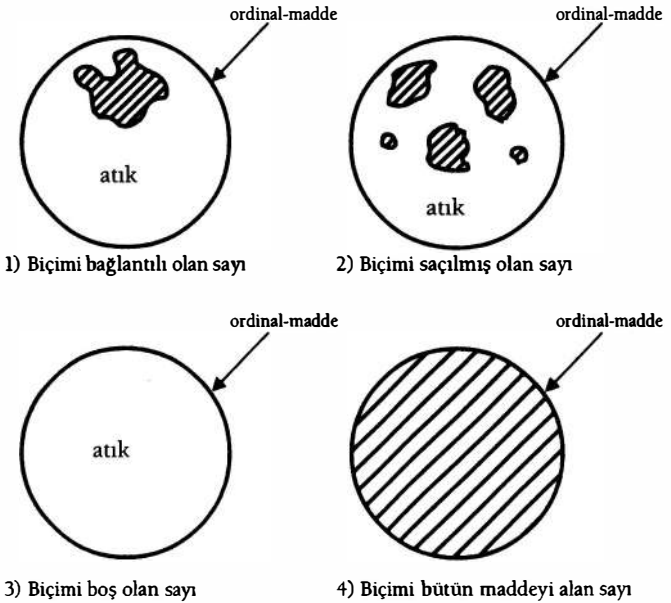
Platon’un mağarasındaki mahkûmların İdea’dan (Sayıdan) ampirik dünyaya (sayılar) geri dönmesi gibi, *çok daha ileride*, 14. Bölümde (1, 0) Sayısının, bildiğimiz negatif -1 sayısının gerçek kavramı olduğunu göstereceğiz. Fakat bulunduğumuz noktada okurun verilen örnekleri Sayının tanımına dair basit açıklamalar olarak düşünmesi ve sayıların ampirik mağarasına geri dönmeye çalışmaması temel bir önemdedir.

2) Bir Sayının maddesi bir ordinaldir; burada gizemli hiçbir şey kalmayacak şekilde ordinaler hakkında yeterince konuştuk. Gelgelelim bir Sayının tekil biçimi sadece o ordinalin bir parçası, ordinalde içerilen bir küme olmak zorundadır. Genel parça (veya altküme) kavramı özellikle belirsizdir ve maddenin sonsuz olduğu durumda sezgi için hiçbir tutunma noktası sağlamaz. Özel olarak:

- bu parça boşluk olabilir (bkz. yukarıdaki örnek);
- bu parça ordinalin tamamı olabilir; madde olarak ω limit ordinali ve biçim olarak yine aynı ordinal alındığında (kendisinin “toplam parçası”), $N = (\omega, \omega)$ şeklinde yazılan tamamen uygun (tanıma uygun) bir Sayı elde ederiz; 16. bölümde bu Sayının bizzat ω ordinali olduğunu kabul etmek için mükemmel nedenler olduğunu göreceğiz, fakat şu an için hiçbir şey aşikâr değil;
- bu parça hiçbir şekilde tek bir parça veya bağlantılı olmak zorunda değildir; saçılmış, delikli, dağınık

elemanlardan oluşuyor, vb. olabilir; örneğin biçim olarak 3, 587 ve 1165 tam sayılarından oluşan kümeyi alabiliriz. Bu üç sonlu ordinal ω 'nin elemanıdır ve dolayısıyla kümelendiklerinde ω 'nin bir parçasını oluştururlar. Doğru Sayımız $N = (\omega, (3, 587, 1165))$ olacaktır ve burada biçimde üç eleman tamamen birbirinden ayrıdır.

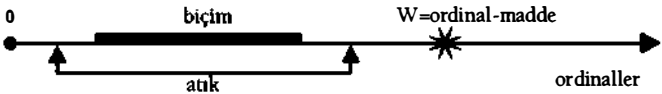
12.4 Bu biçim olasılıkları Sayıya dair bir görselleştirmeyi güçleştirir. Aşağıda verilen uzamsal çizimler üzerine düşünebiliriz:



Fakat en basiti kuşkusuz çizgisel bir düzenlemeye başvurmaktır.

Bu temsil, Sayının varlığının çıktığı evrensel seri olarak kavranan ordinal çizgiselliğe dayanır.

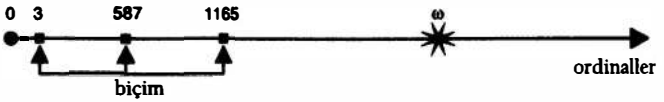
Varsayılan orijini 0 ordinali olan bir yarıdoğru, “ordinaler aksı”nı temsil edecek. Bu aks üzerinde bir yıldız, * işaretiyle Sayının maddesini, yani bir W ordinalini işaretleyeceğiz. Kalın bir çizgiyle Sayının maddesinin parçası olan biçimini işaretleyeceğiz. Kalın çizgiyle işaretlenmemiş geri kalan yerler atığı temsil edecek. Özel bir ordinali göstermek istediğimizde. bunu yarıdoğru üzerinde küçük bir çemberle işaretleyerek yapacağız ve ordinalin adı ya altta ya da üstte olacak. Bu uzlaşımlarla sayı aşağıdaki şekildeki gibi görünecektir:



Bir kez daha söylersek, bu tür bir çizim zihne yardımcı olabilir fakat kısa zamanda yük olmaya başlar. Öğrencilerin kümeler üzerindeki işlemleri (birleşim, kesişim, vs.) deşifre etmekte kullandığı meşhur “Venn diyagramları”yla paylaştığı ana kusur, bir kümenin bir parçasını bir tür sürekli bütün, kompakt bir komşuluk olarak tahayyül etmeye alıştırmasıdır. Halbuki bir parça için yegâne gereklilik, parçası olduğu kümenin elemanlarını içermesidir. Bu elemanlar tamamen saçılmış, ilk kümenin dört ayrı köşesine yayılmış olabilir ve bir parçanın görsel şeması söz konusu saçılıma işaret etmek için delikli, parçalı, bölünmüş olabilmelidir. Bu durumda çizimin ne yazık ki hiçbir sezgisel katkısı olmayacaktır: Sadece *birçok* parça olduğu izlenimi ortaya

çıkacaktır. Benim çizgilerime ve kalın çizgilerime baktığında kavramda bir Sayının biçiminin sürekli bir dilim olması için hiçbir neden olmadığı ve tıpkı atık gibi onun da ordinal-maddenin bütün alanına saçılmış olabileceği asla gözden kaçmamalıdır.

Örneğin, maddesi ω limit ordinali olan ve biçimi (3, 587, 1165) üçlüsü olan yukarıda söz ettiğimiz Sayı aşağı yukarı aşağıdaki gibi temsil edilmelidir (tabii, ω sonsuzluğunun bir çizimde “ölçekdeş” olmaması gibi ek bir güçlük vardır):



12.5 Şimdi bahsedeceklerimiz bu tanımın felsefi bir izahına vakfedilmiştir.

Sayıyı yazarken baş harfi büyük yazmamla başlayalım.

Sayı kavramını belirlemek için girişilen bütün çabalarda terminoloji sorunları araştırmacının sırtına olayın ağırlığını yükler.

Örneğin, “irrasyonel sayılar” adını ele alalım. Matematiksel rasyonelliğin kalbinde böyle bir adlandırma olması gerçekten şaşırtıcıdır. Dedekind tarafından icat edilen “kesim” doktrini, irrasyonel sayı kavramının bütünüyle rasyonel ve ispata dayanan belirleniminden başka bir şey değildir. Öklid’in *Elemanlar* eserinde oranlar teorisi için de aynısı söz konusudur. Rasyonelliği şeffaf, hatta paradigmatic olan bu matematik metinlerinde “irrasyonel”in artık hiçbir anlamı olmadığı açıktır.

Burada semptom olarak beliren şeyin tam da *adlandırma ile anlamlandırma* [signification] arasındaki radikal fark olduğunu söyleyebiliriz. Bir anlamlandırma daima durumun dili, kurulu ve aktarılan bilgilerin dili üzerinden dağıtılır. Bir adlandırmaysa bir anlamlandırma eksikliğinde bir olayı *tespit etmek*, olayın vuku buluşuna karar vermek amacıyla, duruma hesaplanamaz bir rastlantı katan söz konusu olay yitip gitmek¹ [éva-

- 1 “Sürreel” diye adlandırılan sayıların incelenmesi için temel başvuru kitabı, H. Gonshor, *An introduction to the theory of surreal numbers*, Cambridge University Press, 1986.

Gonshor ve benim Sayılar olarak düşündüğüm bu sayılar üzerinde şu an çalışan tüm teorisyenlerin bunları reel sayıların bir “üst-cismi” olarak tasavvur etmesi benimkinden hayli farklı bir sunumla sonuçlanır.

Bu sayıların yaratıcısı Conway’in başlangıçtaki düşüncesi “sürreel” sayıları doğrudan kesimle tanımlamaktı. Bir sayı, kesim koşullarına uyan iki sayı *kümesi* çifti olarak tanımlanacaktır (çiftteki “sağ” kümenin her sayısı, “sol” kümenin her sayısından daha küçüktür). Elbette bu tanımın ikili döngüsellliğini ortadan kaldırmak gerekir (sayı, sayıdan hareketle tanımlanır ve tanım yapılmadan sayılar arasındaki eşitsizlikten bahsedilir). Bu döngüden kurtulmayı sağlayan işlemci elbette sonluötesi tümevarımdır ve bu da kaçınılmaz olarak ordinallerin sahneye girmesine neden olur. Aslında Conway Sayıları, bunların kanonik temsilinden hareketle, yani benim tabirimle “yapısal” karakterinden hareketle takdim eder: *alt-Sayılarından hareketle* tekilleştirilmeleri.

D. E. Knuth’un *Surreal numbers* adlı kitabı (Addison-Wesley, 1974) Conway’in sunumunun diyalog biçiminde “pedagojik” bir versiyonunu verir. Bu kitap mesele üzerinde bir “araştırmacı” zihniyeti yaratmayı hedefler, fakat ordinal seri kullanımını gizlediği için bir hayli çapraşıktır. Ayrıca bana göre Sayıların icadının dehasına karşı olarak yaratılışçı ve ilerici bir mantık kurar (önce sıfır, sonra 1 ve -1, vs. “yaratılır”).

Gonshor’sa birebir bir “kodlama”dan hareket ederken ben kavramı ve kavramın felsefi konuşlanması arayışında küme teorisi çizgisinde yer alıyorum.

Teknik olarak Gonshor ilerleyiş yöntemini reel sayıların 2 tabanında genelleştirir. Reel bir sayı 1 ve 0 göstergelerinin sayılabilir sonsuz bir dizisi olarak sunulabilir. Gonshor’un fikri, sayılabilir dizilerle kısıtlanmak yerine *herhangi bir ordinal uzunluğundaki* bu dizileri düşünmektir.

nouissement] üzereyken ortaya çıkar. Dile, hiçbir şeyin kendisini hazırlamadığı o şeyi raptiyeleyen “şiirsel” bir icat, ek bir gösterendir adlandırma. İcadına dayanak olan olay sonsuza dek yok olduğunda, bir adlandırma anlamlandırmaların boşluğunda kalır.

Nitekim Antik Yunan dünyasında sayıya dair büyük kriz anında, bazı ilişkilerin (örneğin, bir karenin köşegeniyle kenarı arasındaki ilişki) var olan sayı kodunda “sayılabilir” olmadığını gösteren gizemli ve zorunlu o olay vuku bulduğunda *alogos* kelimesi gelerek matematiksel durumu doyurdu ve aştı. Bu kelime, hiçbir *logos*’u

Dolayısıyla + ve – göstergelerinden hareket eder ve W ordinalinin elemanlarında indisli böyle bir göstergeler dizisini “W uzunlukta sürreel sayı” olarak adlandırır.

+ göstergeli ordinal indisleri benim Sayının biçimi olarak adlandırdığım şeyin elemanlarına, – göstergeli ordinal indisleri atığın elemanlarına tekabül eder. Ordinal “uzunluğu” benim Sayının maddesi diye adlandırdığım şeye karşılık gelir.

Örneğin: Maddesi 4 ve biçimi 0 ve 3 elemanlarını içeren ve benim $(4, (0, 3))$ diye yazdığım Sayı, Gonshor’da + – – + şeklinde yazılacaktır.

Elbette sürreel sayılarla Sayılar “aynı şeydir”. Fakat Gonshor’un bunları Frege ve daha sonra Peano’nun aritmetiği türünde kayıtlar veya işaretler gibi ele aldığı söylenebilir. Buradaki ilham kaynağı ideografiktir. Bense Cantor’un izinden sayıları çoklu-varlıkları açısından ele alıyorum ve benim ilham kaynağım ontolojik veya Platoncu.

Teknik geliştirme bile oldukça farklı sonlanır; gerçi sonuçlar her zaman bir versiyondan diğerine tercüme edilebilir. Örneğin, + veya – göstergeleriyle boşluğu işaretleyemeyen Gonshor için göstergelerin “boş dizisi”ni anmasının zorunlu olması önemsiz değildir; benimse $(0, 0)$ yazmam yeterlidir. Sayıya dair ontolojik yaklaşımın kavramsal avantajı, küme teorisinin temel iki bağıntısı olan ait olma, $\in$ ve içerme, $\subset$ bağıntıları dışındaki her türlü göstergeden, tüm ek birebirleştirmeden kurtulabilmesidir.

Kuşkusuz bu, Gonshor için sürreel sayılar teorisinin bir tür teknik uzmanlıkken benim için küme teorisinin ontolojik misyonunun Sayı kavramını içerecek şekilde tamamen doğal bir uzantısı olmasını açıklar.

olmasa da sayı olduğuna karar verilebilecek şeye işaret ediyordu. Düşüncenin yeni bir durumuna, anlamlandırma içermeyen bir adlandırma kaydediyordu: bir sayı olmayan sayı.

O zamandan sonra bu kelime matematik diline olduğu haliyle yerleşti. Tanınmaz halde, ama ayakta kalarak tercümeleri katetti. Özellikle “rasyonel” kelimesi Yunanca *logos*’tan pek az şeyi muhafaza etmiş olduğu için kullandığımız “irrasyonel” kelimesi, *alogos* adlandırmasının önemini o kadar yansıtmaz. Daha önemlisi, söz konusu adlandırma sonunda tekanlamlı bir anlam kazanmıştır. Fakat bu anlamlandırma ile anlamı taşıyan kelimedede onunla açıkça çelişen şey arasındaki tezat hâlâ devam etmekte ve benim yaptığım gibi tekrar etkin hale getirilebilmektedir. Söz konusu tezat, hakikatin kurucu bir olayının dildeki izidir.

“Reel” sayılar veya “sanal” [*imaginaire*] sayılar için de aynısının geçerli olduğu kolaylıkla gösterilebilir. Cantor’un ω ’den sonraki ordinalleri “sonluötesi” sayılar diye adlandırma nedenleri (icadı aracılığıyla sonsuzun kutsallığına darbe indirdiğine dair Cantor’un farkındalığıyla ilişkili nedenler) bile bizim için yavaş yavaş anlaşılabilir hale gelmektedir.

Sayı teorisinde bir adlandırmanın izi ile anlamlandırmanın tortuları arasındaki mesafenin ortaya çıkma sıklığı, sayıya dair düşüncenin gerçek bir *olay sahası* olduğuna işaret eder: Matematikte, oturmuş dil ve bilgilerin anlamdan yoksun olarak gördüğü ve yazgısı sadece şiirsel ve sayı üstü bir adlandırmayı dayanak alan bir olayın aşırılığıyla düzenli olarak darbe alan çok özel bir hassasiyet ve güvencesizlik bölgesini temsil eder.

Bunun nedeni sayının, varlık biçimleri arasında tam da düzenlenişi aracılığıyla düşüncemize açılan şey olmasıdır (bkz. 10.20). Ayrıca düşüncenin sayıda fazlalık olarak *karşılaştığı* her şeyin, olaysal bir durakla varlık rejimini kesintiye uğratan her şeyin düşüncenin düzenini bozma gibi etkileri vardır.

- 12.6 Savunduğum Sayı doktrini, terminolojim ve felsefi düşüncede ona verdiğim yankı çok farklı olsa bile, özünde J. H. Conway'ın 1970'lerde icat ettiği “sürreel sayılar”ın doktrininden farklı değildir (bkz. 1.7). Kesin surette matematiksel düzlemde yeni herhangi bir şey ürettiğimi hiçbir şekilde ileri sürmüyorum. O halde “sürreel sayı” adını neden kısaca büyük harfli “Sayı” olarak değiştiriyorum?

Bu temelinde şiirsel bir tartışmadır. Conway tarafından önerilen adlandırma bana göre çok dar, tabir caizse hayalperest türden bir adlandırma (“sürreel” elbette akla “surrealist” tabirini getiriyor); halbuki bu keşfin müthiş niteliği bence heybetli destan türüne veya Sayının krallara yakışır belirişine işaret etmesini gerektiriyor.

Daha teknik olarak “sürreel” adı, *bir ardışık genişlemeler üzerinden süreklilik* şeklindeki aşırı anlam yüklü fikre yakalanmış gibi görünüyor. Yeni sayıların, (ordinalleri kapsadığı için) reel sayıları “kapsaması” dolaısıyla “sürreel” sıfatı kendisini dayatıyor görünüyor; sanki fethedilen yeni uzam eskisinin bir uzantısıymış gibi. Sürreel propagandası yapmaya çalışan Gonshor (bkz. 1.7) kitabında “artık sürreellerin hem reel sayıları hem de ordinalleri kapsayan bir cisim oluşturduğu

gerçeğini, bu heyecan verici olguyu biliyoruz” diye ilan eder. Fakat bu keşifte –en azından filozof için– *heyecan verici* olan, reel sayılar ve ordinallerin cebirsel bir araya getirilişinin çok ötesine gitmektedir. Söz konusu olan bizzat sayı fikrinin baştan gözden geçirilmesi, sayıyı sonunda çoklu-varlığın birleşik figürü olarak düşünme imkânıdır. Reel sayılar ve ordinallerin bu figürden geliyor olması meselenin en önemsiz yanı, basit bir *sonuçtur*. Üstelik, kötü adlandırılmış “sürreeller”in, reel sayılar ve ordinaller dışında şimdiye kadar kimse-nin var olduğunu düşünmediği ve geriye dönük olarak alışıldık tarihsel sayılarımızı sayısal varlığın savurgan çeşitliliğinde minik bir çıkarım gibi gösteren sonsuzca sonsuz bir sayı kalabalığını içermesi nedeniyle daha da önemsizdir. Bir örnek vermekle yetinelim: Sürreel sayılar sadece sonsuz küçük sayılara dair değil, en az ordinallerin “yukarıya doğru” resmettiği kadar engin olan, “aşağıya doğru” bir sayısal yığın resmeden sonsuzca sonsuz küçük sayılara dair de eksiksiz bir doktrine olanak verir.

Siyasal bir imge kullanalım: “Sürreel” adlandırması bana olay karşısında “reformcu” muhafazayı karakterize eden eski anlamlandırmalara o bağlılıkla, o ölçülülükle damgalanmış gibi geliyor. Halbuki burada kopuşun dilini, “devrimci” dili benimsemek gerektiğine inanıyorum ya da gerektiğini iddia ediyorum. Dolayısıyla cereyan eden şeyin, düşüncemizde Sayının doğmasından başka bir şey olmadığını söyleyeceğim.

Son olarak Sayının baş harfinin büyük yazılması, kapsadığı cinslerin türünü (tam sayılar, rasyonel sayılar, reel sayılar, ordinaller, sonsuz küçük sayılar, vs.)

ayırt etmekten –ki gerçekten de bunlar arasında böyle bir ayırım getirmektedir– ziyade, bir adlandırma (burada Sayı) ile geçmişte kendileri de bir adlandırma olduktan sonra sayıların adlarının aldığı çeşitli anlamlar arasındaki mesafeyi vurgular.

- 12.7 Üzerinde böyle bahse girdiğim Sayı kelimesinin tanımını şimdi meşrulaştırmaya çalışalım: “Bir Sayı, bir ordinalle o ordinalin bir parçasının ortak verilmişliğinden oluşur.”

Ordinaller doğal çokluğun ontolojik şemasıdır. Bir ordinal, ontolojik durumda bir-olarak-sayılan, tutarlı doğal bir birimdir (küme teorisi). Bu birimler (çokluğun yalın tutarlılığının, çoklukların kendisini oluşturan veya sunumuna ait olan “kümelenmesi”nin sayısal olmayan anlamında birimler) Sayının *maddesini*, Sayının olmasına dayanak olan şeyi veya daha kesin bir şekilde söylersek Sayının içinde bir *kesme* uyguladığı şeyi sağlar. Bunu tasavvur etmenin en basit yolu, *bir* Sayının ordinal doğal maddesinden bu maddenin tutarlı bir biriminin parçası, kısmı, bölümü olarak bir biçimi, yani *bir* ordinali çekip aldığını düşünmektir.

- 12.8 Eskilikleri, evrensellikleri, (ayrıntıda gizli olan ürkütücü bir karmaşıklıkla) basitlikleri nedeniyle doğal tam sayılar bize rehberlik eder. Varlıklarına göre düşünüldüğünde doğal tam sayıların, ordinallerin sonsuzca sonsuz alanında tekil bir kesmeden ibaret olduğunu görmüştük (11. bölüm): bu alandan sadece ilk varlık noktasını (boşluk) ve dışarıdan ilk limit ordinal, ω ile sınırlanmış “ilk” ardışıklıkları muhafaza eden kesme.

Keza doğal tam sayıların doğal çoklukların sınırsız dokusunda sadece *sonlu* olanı çekip aldığını ve yalıtıldığını da gördük.

Neden bu yolda devam etmeyelim? Ayrık bir prosedürler anarşisi (cebirsel, topolojik, küme teorisi..., bkz. 1.13) kullanmaktansa Sayı kavramını bir kesme yöntemiyle ordinallere üniform bir şekilde bağlamak kesinlikle daha rasyonel olacaktır.

Elbette bunun *olanaklı* olması gerekir. “Olanaklı” ne demektir? Bu yolda alışıldık sayılarımızla yeniden karşılaşmamız anlamına gelir. Ontolojik bir sadelik uğruna, ne rasyonel sayıları ne reel sayıları kapsayan bir Sayı kavramını dayatmak kesinlikle keyfi olacaktır. Fakat doğal bir çoklukta kesme olarak Sayı, tam sayılar kadar rasyonel (veya kesirli) sayıları, negatif tam sayılar kadar reel sayıları, ordinaller kadar sonsuz küçük sayıları da tanımlandığı anda kanımca hiçbir şey böyle bir kavramın matematiksel *birliği* ve felsefi *yeniliğini* yenemez.

Ayrıca “kesme” fikrinin tamamen ontolojik sadeliği, girdiğimiz bahsin iyi bir bahis olduğunu doğrular. Bir Sayının bir yandan bir ordinal (bu, Sayının sunumun doğal biçimine ait oluşunun imzasıdır) öte yandan bu ordinalin bir parçasından (bu, doğal maddede “biçimlendirme” olarak kesmedir) oluşuyor olduğunu söylemek, Sayıyı tanımlamak için sadece çokluğun ontolojisinin basit, “temel” kategorilerini kullanır.

- 12.9 Böylelikle Sayı, Doğanın varlık biçimlerindeki sonsuz savurganlığı ile katetme ve ölçme konumunda olduğumuz şey arasındaki aracı olarak belirir. En azından

varlığının kısıtlı bir alanında, düşüncemizi doğal varlık-olarak-varlığın kavranışı ve ölçümü için uyumlu hale getiren şeydir. Fiziğin tamamı bunu doğrular.

12.10 Aristoteles'in dili (Madde ve Biçim), Sayı fikrini deşifre etmek için kuşkusuz en etkili olan dildir. Bilhassa bizi materyalist metaforlara yerleştirme gibi bir avantajı vardır. Platon'dan bu yana ve aşikâr gizemi nedeniyle Sayının, Doğaya dair bütün idealist temsillerin kalbi olduğunu biliyorken bu göz ardı edilebilecek bir unsur değildir. Kitabın başında hatırlattığım üzere, Sermayenin yasası altında bugün olduğu haline, yani sayılabilir olanın ideolojisinin düşünülmeyen dayanağına dönüşmesi de bu temsiller arasındadır.

Bir ordinal daima, Sayının üzerinde kesme yaptığı şey olduğu için, herhangi bir Sayı verildiğinde bu Sayının *maddesi* olan bir ordinalin daima var olduğunu söyleyeceğiz. "Madde" tabiri burada tamamen kesin iki anlam alır. Bir yandan, ordinal Sayının "temeli", Sayının biçiminin kesildiği şeydir. Dolayısıyla *bir* ordinal, onun sonucu olan, ondan çekip çıkarılan bir Sayının, bu çekip çıkarılmanın ilkesi olarak var olmasını sağlayan şeydir. Öte yandan bir ordinalin bütün elemanlarının ordinal olduğunu biliyoruz (bkz. 8.5). Sayının sayısallığı, kestiği şey, biçimi bir ordinalin bir parçasıysa, tıpkı bir kümenin bir parçasının bütün elemanlarının o kümenin elemanları olması gibi, bir sayının kestiği şeyin de *tamamen ordinallerden oluştuğu* ortaya çıkar. Bu kez "madde", *ilk madde* anlamına gelir. Sayısal kesmenin bileşenleri söz konusu olduğunda işimiz sadece

ordinallerdir. Kesme bir ordinal üzerinde gerçekleşir ve kesilen şeyin elemanları da ordinallerdir. Maddesinin kategorileri bakımından Sayı baştan aşağı doğaldır.

- 12.11 Aristotelesçi metafor kolaylıkla genişletilebilir: Doğal kaynağını gösteren ve maddesini sağlayan ordinalde sayısal kesmenin ürününün, Sayının *biçimi* olduğunu söyleyeceğiz. Sayının *kendisi* daha ziyade kesme hareketidir; bu nedenle Sayıyı maddesi (bir ordinal) ve biçimi (o ordinalin bir parçası) çiftiyle temsil ediyoruz. Fakat biçim, Sayının doğal talimattan kaçmasını sağlayan veya en azından kaçmasını *mümkün* kılan şeyi yoğunlaştırır. Zira bir ordinalin herhangi bir belirsiz parçası olan biçim, doğal bir birim içinde, genelde doğal olmayan bir çokluk hasıl eder.

Aslında biçim, bir ordinalin elemanları arasından seçilip alınmış bir ordinaller kümesinden ibarettir. Bu seçme maddenin bir kısmını ayırt eder. Gelgelelim her ordinal bir ordinaller kümesi (yani kendisinden önce gelenlerin kümesi, bkz. 11.2) olsa da *bütün ordinaller kümesinin bir ordinal olduğu doğru değildir*. Bir ordinalde delik yoktur, O'dan kendisine kadar (kendisi hariç) onu önceleyen *bütün* ordinaller ona aittir. Üstelik bu, bir ordinalin kendi “uzunluğunun” adı olmasının nedenidir. Şayet tersine, ordinallerden oluşan herhangi bir kümeyi alırsanız çok sayıda ordinalin kümede eksik olması, kümenin her tarafında delikler olması kuvvetle muhtemeldir. Dolayısıyla bu bir ordinal olmayacaktır. Sonuç olarak bir Sayının biçimi çoğunlukla bir ordinal değildir, sadece maddesi ordinaldir. Materyalist bir felsefede beklenebileceği gibi homojen olan, eksik

içermeyen, düzenli olan maddedir ve delikli, kuralsız, doğal olmayan biçimdir. Madde daima bu limitlerin içinden çıkarılıp alınıyor olsa da Sayının biçimiyle genel olarak doğal varlığın limitlerini ihlal ederiz.

12.12 Şayet biçim, Sayı denen kesmeyle bir ordinalden çekip çıkarılan bir parçaysa, doğal bir kümenin çoğunlukla doğal olmayan bir altkümesiye geriye bir artık bırakır; biçimin ordinal maddede oyduğu heykelin talaşları gibi bir şeyler vardır. Bu kalıntı başlangıçtaki ordinalin, Sayının biçiminin elemanları olmayan elemanlarından oluşur. Ya da şöyle söyleyebiliriz: Bu kalıntı, maddenin biçime alınmamış kısmıdır. Bunu, Sayının atığı olarak adlandırıyoruz.

Aynı biçim gibi, bir Sayının atığı da ordinallerden oluşan bir çokluktur. Yine biçim gibi, atık da çoğunlukla bir ordinal değildir (ayrıca atığın doğal olması paradoksal olacaktır; gerçi biçimin ordinal-maddede hiçbir delik olmadan W ordinalinden itibaren tüm ordinalleri kestiği çok özel durumda doğal olacaktır). Atık, Madde ile Biçim arasındaki basit *farkla* elde edilir.

Bu durumda biçim ve atığın birbirinin yerine geçebilir olduğu söylenerek itiraz edilebilir. Bir anlamda olan aslında budur. Çağdaş sanat eski bir biçimle donanmış eserlerin atığını eserler olarak sergileyerek Sayının bileşimindeki bu belirsizliği farkına varmadan düşünmüştü. Belirli bir Sayı için atık ile biçimi nihai olarak ayıran şey, Sayılar üzerindeki *sıra düzeni* yasasından kaynaklanır; bu yasayı 13. bölümde inceleyeceğiz.

Biçim ile atık birlikte alındığında ya da biçim ile atık birleştirildiğinde maddeyi, yani kalkış noktasındaki or-

dinali geri verdiğini bir kez daha belirtelim. Madde, biçim ve atıktan oluşan küme teorisi yapısındaki bu üçlü, sayısal kesmenin tamamıdır.

12.13 Bu yorumların ışığında Sayı kavramına dair araştırma planımızın ana hatlarını çizebiliriz:

- İki Sayının farkını oluşturan şeyi incelemek ve bunları serileştiren sıralılık yasası üzerine düşünmek: Bu yasa olmadan sonlu özneler olarak Sayıların bilgisinde hiçbir ilerleme umudumuz olmazdı.

- Cebiri, Sayının işlemsel boyutunu (toplama, çarpma, vs.) kurmak: Bu cebir olmadan, özellikle de sayına ideolojisiyle sınırlanmış kişiler olarak, Sayının bir sayı olacağına kimse inanmazdı. Bununla birlikte Sayının varlığının işlemlerden evvel geldiği, Sayının öncelikle Doğanın temeli üzerine bir düşünce, Sayının madde-si olarak düşünülebilecek doğal bir birim üzerinde bir biçim çıkarıp alan bir kesme olduğu hususunda taviz vermeyeceğiz.

- Sayıların sonsuzca sonsuz kalabalığında, varlığın sayısal biçimlerdeki inanılmaz savurganlığında tarihsel sayılarımızı, doğal sayıları, bağıl sayıları (negatif sayılar), rasyonel sayıları (kesirli sayılar), reel sayıları, ordinalleri tekrar bulmak.

- Bildiğimiz veya kullandığımıza kıyasla sonsuzca daha çok Sayı olduğunu, tarihsel sayımızın, varlığın Sayılardaki aşırılığı karşısında çok yoksul olduğunu göstermek. Böylelikle Sayının düşünceye hakiki bir uzam açtığını ve bu düşüncenin fiili işlemlerde, küme teorisi ontolojisinin düşünceye sağladığı haliyle çoklu-varlığı-

nın *muktedir* olduğu bütün Sayı türlerinin sadece minik bir kısmını açıkladığını kesinleştirmek.

12.14 Bu plan tamamlandığında düşünülebilir ve düşünülemez yönleriyle Sayının buruk mutluluğunu tadeacağız. Sayı varlığa teslim edilecek ve olayın sayısız/sayılamaz [*in-nombrable*] sonucuna doğru yüzümüzü dönebileceğiz.

Ordinal kümeleri üzerine ek açıklama

- N1. Sayı kavramının merkezinde, “bir ordinalin parçası”, yani belirli bir ordinal üzerinden çekip alınmış ordinallerden oluşan herhangi bir küme kavramı bulunur. Bir ordinalin tüm elemanları ordinal olduğu için, “bir ordinalin parçası” nosyonunda hâkim olan “bir ordinaler kümesi” nosyonunu doğru şekilde ele almak amacıyla birkaç açıklama zorunlu.
- N2. Bir ordinaler kümesinin bir ordinal olması için kümede hiçbir delik olmamasının, belirtilen ordinale kadar ordinaleri birbirine bağlayan ait olma zincirinde hiçbir ordinalin eksik olmamasının gerektiğini ve yettiğini belirtmiştik.
- N3. Ait olma, ordinaler arasında bir tam sıralılık olduğu için, *her ordinaler kümesi ait olma ilişkisiyle tam sıralanmıştır*. İçinde delik olup olmaması hiçbir şeyi değiştirmez. X bir ordinaler kümesiye ve x_1 ve x_2 bu kümenin elemanlarıysa daima ya $x_1 \in x_2$ ya $x_2 \in x_1$ ya da $x_1 = x_2$ olacaktır. Dolayısıyla bir Sayının biçimi ve atığı en az maddesi kadar ait olma üzerinden tam sıralıdır. Biçimin ve atığın doğal olmayan karakterini belirleyen

şey deliklerdir, sıralılık değil. Doğal sunumun evrensel dolanıklığı, Sayının bütün bileşenlerine yasasını kaydeder. Fakat Sayıların büyük bir kısmını varlığın bütünüyle doğal alanından eksiltlen şey bunların biçimini (ve dolayısıyla atıklarını) etkileyen eksiklerdedir. Bir Sayı, doğal dokuda delikli olması bakımından doğal değildir.

- N4. Her ordinailler kümesinin bir minimal elemanı vardır. Bir kez daha bu, doğal çoklukların minimallik ilkesi denen büyük yasasından kaynaklanır (bkz. 8.10). X tanımlanmış bir ordinailler kümesi olsun ve P “ X ’e ait olma” özelliği olsun. Bu özelliğe sahip bir ordinal varsa (bunun için X ’in boş olmaması yeterlidir) o halde özelliğe sahip olan bir en küçük ordinal vardır. Bu en küçük ordinali, X ’in minimal ordinali olarak adlandırıyoruz: X ’in bütün ordinaillerine aittir, fakat X ’in hiçbir ordinali ona ait değildir.

Minimal elemanın var olması, delik olup olmamasıyla alakalı değildir. Bundan dolayı bir sayının biçiminin minimal elemanından veya atığının minimal elemanından her zaman söz edebiliriz. Sayının maddesinin minimal elemanı ise, madde bir ordinal olduğu için, daima boş küme, O ’dır.

- N5. Fakat belirli bir ordinailler kümesinin her zaman maksimal elemanının olmadığına dikkat etmeliyiz. Daha önce bir limit ordinalin (ki bir ordinailler kümesidir) hiçbir maksimal elemanı olmadığını görmüştük (bkz. 9.14). *A fortiori* ordinaillerden oluşan herhangi bir küme sonsuzca “açık” olabilir ve bütün diğerlerine hâkim olan hiçbir eleman kapsamayabilir.

N6. Tersine, ordinallerden oluşan bir X kümesinin daima bir üst sınırı vardır. “Üst sınır” tabiri, X ’in bütün ordinallerinden daha büyük olan ordinallerin en küçüğü anlamına gelir. Burada yine üst sınırın varlığı, minimallik ilkesiyle garanti edilir. P “ X ’e ait olan bütün ordinallerden daha büyük olma” özelliği olsun. Bu özelliğe sahip olacak bir ordinal kesinlikle olacaktır, aksi takdirde X bütün ordinallerin kümesine eşit olurdu, ki bu da tutarsızdır. Dolayısıyla P özelliğini taşıyan bir en küçük ordinal vardır; X ’in bütün elemanlarından daha büyük olanlar arasında en küçük olandır ve bundan dolayı X ’in üst sınırıdır. Bu üst sınırı $\sup(X)$ ile göstereceğiz.

N7. Bir ordinalin bir öz parçası (ordinalin kendisi olmayan bir parça, gerçekten kısmi olan bir parça) bir ordinaldir ve dolayısıyla baştaki ordinale *aittir*.

Bunun tersinin, ordinallerin tanımının bir parçası olduğunu daha önce görmüştük. Ordinaller geçişlidir ve bundan dolayı bir ordinale ait olan her ordinal aynı zamanda bu ordinalin bir parçasıdır. Şimdi bir ordinalin öz parçası olan her *ordinalin* o ordinale ait olduğunu ispatlamak istiyoruz. Bu da, ordinaller arasında ait olma üzerinden sıralılığın, *içerilme üzerinden sıralılığa denk* olduğu anlamına geliyor.

W_1 ordinalinin W_2 ordinalinin bir parçası olduğunu varsayalım; $W_1 \subset W_2$. Ait olma ordinaler üzerinde bir tam sıralılık olduğu ve W_1 , W_2 ’den farklı olduğu için (çünkü W_2 ’nin bir öz parçasıdır) mümkün olan iki durum vardır:

- Ya $W_1 \in W_2$ 'dir ve teorem doğrudur; W_2 ordinalinde içeren W_1 ordinali aynı zamanda ona aittir, parça aynı zamanda bir elemandır.

- Ya da $W_2 \in W_1$ 'dir. Fakat W_1 geçişli olduğu için bunun sonucu $W_2 \subset W_1$ şeklindedir. Halbuki $W_1 \subset W_2$ olduğunu biliyoruz. Bir küme bir başka küme tarafından içeriliyorsa ve aynı zamanda o başka kümeyi içeriyorsa sezgisel olarak görüldüğü gibi bunlar eşit demektir ve okur bunu tek bir satırda ispatlayabilecektir. Gelgelelim W_1, W_2 'ye eşit olamaz çünkü onun bir öz parçasıdır. Öyleyse doğru durum birinci seçenektir ve teorem ispatlanmıştır.

Öyleyse ordinallerle uğraşırken birinin diğerine ait olduğunu söylemekle birinin diğeri tarafından içerildiğini söylemek aynı kapıya çıkar. Ya da: Bir ordinal (parça olarak) bir başka ordinali temsil ediyorsa aynı zamanda onu sunuyordur (eleman olarak). Bu bir ordinalin, *eleman olmayan* parçaları olmasını engellemez. Basitçe söylersek, bu parçalar ordinal de değildir. Örneğin delikli, boşluk içeren kümeler veya bir ordinal zincirinin ortasından başlayan veya sadece birkaç ayrı elemanı sunan, vb. kümeler söz konusu olabilir. Genelde bir Sayının biçiminde olan budur.

Buna rağmen bir Sayının biçimi bir ordinalse, önceki söylediklerimizden bu biçimin sadece maddenin (baştaki ordinalin) bir parçası değil, aynı zamanda bir elemanı da olduğu sonucu çıkar. Sonuç olarak bu biçim çok hususidir, zira maddenin bir "hücre"yle özdeşdir. Bu durumda Sayı, Doğadan çekip alınmış bir temsilden ziyade basit bir doğal sunumdur.

13. Sayıların farkı ve sırası

13.1 Bir Sayı tamamen maddesi (biçiminin alındığı ordinal) ve biçimi tarafından belirlenir. Atık, madde ile biçimin farkıyla elde edilir. Bundan dolayı dediğimiz gibi Sayıyı $N = (W, F(N))$ biçiminde yazmak çoğunlukla çok pratiktir; burada W ordinal-madde ve $F(N)$ biçimdir. $D(N)$ ile gösterilen atık, $W - F(N)$ 'e eşittir.

Bu koşullarda iki Sayının *farkı* nasıl düşünülmeli? Aynı madde ve aynı biçime sahiplerse doğal olarak özdeş olduklarını koyutlayacağız. Özdeş değillerse aşağıdaki seçenekler mümkün olabilir:

- Aynı maddeye sahip olmadıkları için özdeş olamayabilirler. W_1 birinin, W_2 diğerinin ordinal-maddesi olsun. W_1 ve W_2 gibi iki ordinal ait olmaya göre, ama aynı zamanda görmüş olduğumuz gibi (bkz. N7) içermeye göre düzenlenir: ya $W_1 \subset W_2$ ya da $W_2 \subset W_1$ olmalıdır. Öyleyse bu durumda W_1 ile W_2 'yi farklı kılanın, $W_2 - W_1$ kümesi veya $W_1 - W_2$ kümesi olduğu söylenebilir. Bir ordinalin bütün elemanları ordinal olduğu için W_1 ile W_2 'yi, dolayısıyla bu ordinallerin maddesini oluşturduğu N_1 ve N_2 sayılarını farklı kılan, W_2 'ye ait olan ama W_1 'e ait olmayan ($W_1 \subset W_2$ durumunda) veya W_1 'e ait olan ama W_2 'ye ait olmayan ($W_2 \subset W_1$ durumunda) ordinallerdir;

- Aynı maddeye sahip olmalarına rağmen aynı biçime sahip olmadıkları için özdeş olmayabilirler. Bu durumda birinin biçiminde olan ve diğerinin biçiminde olmayan elemanlar (dolayısıyla ordinaller; zira bir Sayının ilk maddesi bu üç bileşendeki ordinallerden oluşur; madde, biçim ve atık) vardır. Fakat madde aynı olduğu için birinin biçiminde olduğu halde diğerinin biçiminde olmayan bütün elemanlar, onun atığındadır; $w \in F(N_1)$ ve $w \notin F(N_2)$ ise, o halde $W \in D(N_2)$ olmalıdır. N_1 ve N_2 gibi iki Sayının farkını oluşturan, birinin biçiminde olan ve diğerinin atığında olan ordinaler kümesidir.

Dolayısıyla iki Sayının farkının ordinaler bakımından düşünülebileceği görülüyor. Bir ordinal, birinin maddesindeyse ama diğerinin maddesinde değilse ya da birinin biçiminde ve diğerinin atığındaysa iki Sayı arasındaki *farkı oluşturur*.

13.2 Herhangi iki Sayıyı alalım. Birinin maddesindeyse ama diğerinin maddesinde değilse ya da birinin biçiminde ve diğerinin atığındaysa (bu, ikisinin de maddesinde olduğu anlamına gelir, çünkü biçim ve atık maddenin parçalarıdır) bir w ordinalinin bu iki sayıyı ayırdığını söyleyeceğiz.

13.3 Örnek verelim.

N_1 , ordinal-maddesi 2 ve biçimi (0) olan (2, (0)) Sayısı olsun. Bu gerçekten de bir Sayıdır, çünkü 2 bir ordinaldir (varlığı (0,(0)) olan sonlu ordinaldir, bkz. 11.5) ve (0) şeklinde gösterilen 0'ın tekliği bu ordinalin bir parçasıdır (bkz. 7.11). Bu N_1 sayısının maddesi 2 ordinaldir ve biçimi (0) parçasıdır.

N_2 , $(\omega, 2)$ Sayısı olsun. Bunun bir Sayı olduğu doğrudur, zira ω bir ordinaldir (ilk limit ordinal) ve ω 'nin bir elemanı olan 2 ordinali aynı zamanda bir parçadır (ordinallerin geçişliliği). Bu N_2 sayısının maddesi ω ve biçimi $(0, (0)) = 2$ parçasıdır.

ω ordinali N_1 ile N_2 Sayılarını ayırmaz. Aslında ω kesinlikle N_1 'in (sonlu ardıl ordinal 2 olan) maddesinde değildir, fakat aynı zamanda N_2 'nin maddesinde de değildir, zira bu madde ω 'dir ve hiçbir küme kendisine ait olamaz: Dolayısıyla $\omega \in \omega$ olamaz.

0 ordinali de (boş küme) N_1 ile N_2 Sayılarını ayırmaz. Gerçekten de 0, her ikisinin biçiminde de yer alır. N_1 'in biçimi, tek elemanı 0 olan (0) tekliğidir. Dolayısıyla 0 bu biçime aittir. Öte yandan 0, N_2 'nin biçimi olan 2 ordinalinin bir elemanıdır. Dolayısıyla 0, N_2 'nin de biçimindedir.

Fakat (1 tam sayısı olan) (0) ordinali, N_1 ile N_2 Sayılarını ayırır. Gerçekten de (0) , 2 ordinalinin bir elemanıdır ve dolayısıyla N_2 'nin biçimine aittir. Fakat tam da (0) şeklinde olan N_1 'in biçimine ait olamaz, çünkü kendi kendine ait olma, $(0) \in (0)$ imkânsızdır. (0) , N_1 'in (2 ordinali olan) maddesinin bir elemanı olduğu halde biçiminde bulunmadığı için atığındadır.

- 13.4 İki Sayı ve herhangi bir ordinal verildiğinde söz konusu ordinalin iki Sayıyı ayırıp ayırmadığını daima bilebiliriz. N_1 ve N_2 Sayılsa, " N_1 ile N_2 'yi ayırma" özelliği tam tanımlanmıştır.

Fakat N_1 ile N_2 'yi ayıran bir ordinal varsa (dolayısıyla N_1 ile N_2 farklıysa), doğal çoklukların çok önemli

. bir yasası olduğu için sürekli kullandığımız minimallik ilkesi gereğince (bkz. 8.10), bu Sayıları ayıran bir en küçük ordinal vardır. Ya da başka bir deyişle “ N_1 ile N_2 Sayılarını ayırma” özelliği için bir minimal ordinal vardır.

13.5 Çok önemli bir tanım: İki Sayıyı ayıran en küçük ordinali, iki Sayının ayırtacı olarak adlandıracğız.

Ayırtaç kavramının önemi şudur: İki Sayı arasındaki fark düşüncesini, *tek bir ordinalin* incelenmesine indirger. Farkın bu “minimal nokta”sı, iki Sayı arasındaki karşılaştırmanın global değil, *yerel* olarak ele alınmasına olanak verir. Ayırtacın var olması, iki sayının farklı olduğu sonucuna varmak için yeterlidir.

13.6 Bir örnek daha.

Yukarıdaki örnekte kullandığımız N_1 ve N_2 ’yi alalım (bkz. 13.3): $N_1 = (2, (0))$ ve $N_2 = (\omega, 2)$. Bunların ayırtacı nedir?

- 0’ın N_1 ile N_2 ’yi ayırmadığını gördük.

- Ayrıca (0)’ın ikisini ayırdığını da gördük. (0)’dan daha küçük tek ordinal 0 olduğu ve bu da N_1 ile N_2 ’yi ayırmadığı için, (0) kesinlikle bu ikisini ayıran en küçük ordinaldir.

Dolayısıyla (0)’ın $(2, (0))$ ile $(\omega, 2)$ Sayılarının ayırtacı olduğunu söyleyeceğiz.

Ayırtacın konumuna işaret edelim: N_1 ve N_2 Sayılarının maddesindedir, fakat N_2 ’nin biçimindeyken N_1 ’in atığındadır.

Şimdi aşağıdaki gibi iki sayıyı düşünelim $(S(W), W)$ ordinalinin ardıl ordinalini göstermektedir, bkz. 9.5):

- $N_3 = (S(\omega), \omega)$. Maddesi $S(\omega)$ ve biçimi ω 'dir. Her ordinal, ardılının elemanı olduğu ve bir ordinalin bütün elemanları ordinalin bir parçası olduğu için (geçişlilik) bu, $S(\omega)$ 'nin bir parçasıdır.

- $N_4 = (S(S(\omega)), \omega)$. Maddesi, ω 'nin ardılının ardılıdır ve biçimi ω 'dir.

N_3 ile N_4 'ün ayırtacı nedir? İki Sayı aynı biçime sahiptir: ω . Fakat bu biçim farklı maddelerden alınmıştır: $S(\omega)$ ile $S(S(\omega))$. $S(\omega)$ *ordinaline kadar* bu iki Sayı için her şey "aynı" şekilde gelişir. Bu ordinal N_4 'ün maddesindedir çünkü $S(\omega) \in S(S(\omega))$; ama N_3 'ün maddesinde değildir çünkü $S(\omega) \notin S(\omega)$. Dolayısıyla $S(\omega)$, N_3 ile N_4 'ün farkını oluşturan en küçük ordinaldir; bu iki Sayının ayırtacıdır.

N_3 ile N_4 'ün ayırtacının konumuna işaret edelim: $S(\omega)$, N_3 'ün maddesinde değildir ama N_4 'ün maddesindedir. Fakat bu kez N_4 'ün ω şeklinde olan *biçiminde değildir*. Dolayısıyla atığındadır.

Ayırtacın ordinal noktasallığı ile kıyaslanan Sayılardaki konumunun bileşimi, bize Sayıların sınırsız alanında sıralılık kavramının anahtarını verecektir.

13.7 Tüm bunlara daha kesin bir biçim verelim.

N Sayısının gerçekleştirdiği sayısal kesmenin üç boyutu (madde, biçim, atık) açısından bir W ordinalinin işgal ettiği konumu, N Sayısı bakımından W ordinalinin konumu olarak adlandıracamız ve $L(w, N)$ ile göstereceğiz. Konum için mümkün üç durum olduğu aşikârdır:

- Ya w ordinali, N Sayısının maddesi olan W ordinalinin elemanı değildir. Bu durumda madde dışında konumlandığını söyleyeceğiz: $L(w, N) = hM(N)$.

- Ya w ordinali, W maddesi içindedir ve Sayının biçimine aittir. $L(w, N) = F(N)$.

- Ya da w ordinali, W maddesi içinde olmasına rağmen Sayının atığındadır. $L(w, N) = D(N)$.

Söz konusu olan N sayısı hakkında herhangi bir muğlaklık olmadığında $L(w) = D$ gibi basitçe yazabil-memiz mümkün olacak. Bu, w 'nin (bahsettiğimiz sayı için) konumunun, (bu Sayının) atığına ait olduğu anlamına gelecek.

Bir N Sayısı verildiğinde N için her ordinal konumlanmıştır, zira “madde dışı” konumu kabul ediyoruz.

Bir ordinal N_1 ile N_2 gibi iki sayıyı ayırdığında (bkz. 13.2) bunun anlamı çok basitçe iki Sayı bakımından konumunun aynı olmadığıdır. *İki Sayıyı ayıran bir w ordinali için olanaklı konumların tablosu aşağıda gösterilmektedir (konumlar hM, F ve D şeklindedir):*

$L(w, N_1)$	$L(w, N_2)$
F	D
F	hM
D	F
D	hM
hM	F
hM	D

N_1 ile N_2 'nin ayırtacı bunları ayıran en küçük ordinal olduğu için, illa tabloda yazılı konum “çiftleri”nden birinde olmak zorundadır. Mesela N_1 'in atığındaysa N_2 'nin ya biçiminde ya da maddesinin dışında olmalıdır.

13.8 Sayılar üzerinde sıralılığın tanımı.

N_1 ve N_2 gibi iki Sayı alalım ve w bunların ayırtacı olsun (ayırtaç kavramı çok merkezi olduğu için gerektiğinde 13.4, 13.5 ve 13.6 maddelerini tekrar okuyun).

N_1 ve N_2 Sayıları için w ayırtacının konumu aşağıdaki üç durumdan birine giriyorsa N_1 'in N_2 'den daha küçük olduğu söylenecek ve $N_1 < N_2$ yazılacak:

- $L(w, N_1) = D(N_1)$ ve $L(w, N_2) = F(N_2)$: *ayırtaç N_1 'in atığında ve N_2 'nin biçiminde.*

- $L(w, N_1) = hM(N_1)$ ve $L(w, N_2) = F(N_2)$: *ayırtaç N_1 'in maddesinin dışında ve N_2 'nin biçiminde.*

- $L(w, N_1) = D(N_1)$ ve $L(w, N_2) = hM(N_2)$: *ayırtaç N_1 'in atığında ve N_2 'nin maddesinin dışında.*

İki Sayının ayırtacının mümkün konumlarına dair 13.7'deki tablonun işaret ettikleriyle bu üç durumu dikkatli bir şekilde karşılaştırın.

13.9 $N_1 < N_2$ bağıntısının bir sıralılık bağıntısı olduğu aşîkâr değildir. Fakat bu hususu tesis etmeden önce, düşünce için söz konusu bağıntının karakteristiklerini açığa çıkarabiliriz.

Ayırtaç, iki Sayının farkı kavramını tek bir noktada (bir ordinalde) bir araya getirir. Burada öne sürülen sıralılık bu noktanın konumuna, dolayısıyla bir tür *farkın topolojisine* bağlıdır. Zira, her N Sayısını, “pozitif” sayısallığı teşkil eden kesme jestinde, bu jestin maddeden çekip aldığı şey biçim olduğu için, *eğer* iki Sayının ayırtacı birinin biçimindeyse daima bu Sayının diğerinden “daha büyük” olduğunu düşüneceğiz. Gerçekten de ayırtaç öteki sayıda ya atıktadır ya da madde dışındadır.

Tersine, bir Sayının atığı, biçiminin kesmesinin sadece pasif bir sonucudur, sayısal jestin istemeden ortaya çıkan kalıntısıdır. Edim olarak sayının *maddeye bıraktığı* şeydir. İki Sayının ayırtacı birinin atığındaysa daima bu Sayının diğerinden “daha küçük” olduğunu düşüneceğiz. Bu diğer sayıda ayırtaç ya biçimdedir ya da madde dışında.

13.10 Sayının sayısallığı olarak düşünülen biçimin, pasif tersi olarak düşünülen atık üzerindeki aktif üstünlüğü bakımından *bütün sıralılığı* belirleyen bu kavrayışın görünüşte paradoksal bir sonucu, ayırtaçları N_1 'in atığında ve N_2 'nin *maddesinin dışındaysa* N_1 sayısının N_2 'den daha küçük olacağıdır. Bu “paradoks”, “madde dışı” konumunun hepsi arasında en kayıtsız olduğuna inanılmasından kaynaklanır. Ne biçiminde ne de atığında olan “madde dışı” bir ordinal, sayısal jestten etkilenmez bile. Öyleyse atıkta yer alan ve dolayısıyla en azından Sayının maddesinde bulunan bir ordinalden daha da pasif, biçimin sayısal çekip çıkarma işleminden daha az etkileniyor değil midir? hM konumu Sayıyla ilişkili olarak *hiçliğin* bir figürü, atığın pasif figüründen ontolojik olarak daha “aşağıda” yer alan bir figür değil midir?

13.11 Bu “paradoks” hissi temel bir noktayı unuttur: “*Madde dışı*” konumu, *bizzat maddeyi içerir*, zira bir W ordinali kendisinin elemanı değildir. Hiç kimse maddenin, Sayının jestine “kayıtsız” olduğunu savunamaz: Madde, Sayının ilk gerçeğidir, Sayı ondan hareketle var olur, varlığını sayısal kesmeye açan doğal çokluktur. İki Sayının

ayırtaç, bunların biri için “hM”de konumlandığında *daima* ikisinden birinin bizzat maddesi söz konusudur.

N_1 ve N_2 'nin ayırtaç N_2 'nin maddesinin dışındaysa, nedeni N_1 'in maddesinde (biçiminde veya atığında) olmasıdır. Aksi takdirde, yani iki Sayının maddesinin dışında olsaydı bu sayıları ayırmazdı. Dolayısıyla ayırtaç kesinlikle N_1 'in maddesinde ve N_2 'nin maddesinin dışında olan en küçük ordinaldir. Bu açıkça N_1 maddesinde olan W_1 ordinalinin N_2 maddesinde olan W_2 ordinalinden daha büyük olduğu anlamına gelir. Aksi takdirde W_1 'de, W_2 'de olmayan bir ordinal olamazdı, zira bir ordinal kendisinden önce gelen bütün ordinalleri eleman olarak kapsar (bkz. 11.2). Dolayısıyla $W_2 \in W_1$ olur (ordinaler üzerindeki sıralılık bağıntısı ait olma-dır). Fakat W_2 , W_2 'ye ait olmayan en küçük ordinaldir; W_2 'den küçük bütün ordinaler tam da W_2 'nin elemanlarını oluşturur. Son olarak, W_2 , W_1 'dedir ve W_2 'de olmayan en küçük olan elemandır. Dolayısıyla N_1 'in maddesi olan W_1 'de yer alan ama N_2 'nin maddesi olan W_2 'de yer almayan, yani N_2 'nin maddesinin dışında yer alan en küçük ordinaldir. N_2 'nin maddesi olan W_2 , N_1 ile N_2 'nin ayırtaçtır.

Bu ispatın genel bir geçerliliği vardır: N_1 ile N_2 'nin ayırtacının N_1 'in atığında ve N_2 'nin maddesinin dışında olması nedeniyle, ne zaman N_1 'in N_2 'den “daha küçük” veya $N_1 < N_2$ olduğunu söylersek bu, söz konusu ayırtacın N_2 'nin ordinal-maddesi olduğu anlamına gelir. Ayrıca bu bağıntı meşrudur, çünkü bir Sayının maddesi, sayısal kesmenin üzerinde işlem yaptığı bir-ordinal, atığın pasifliğine ontolojik olarak üstün olan ilk varlığın bir kalıtıdır.

Dolayısıyla $D < hM < F$ yönünde konumları sıralamak felsefi olarak bir temele dayanmaktadır: Kesmenin olumlayıcı sayısallığı olan biçim, madde dışına üstündür ve o da atığın pasifliğinden üstündür, zira gerçekte bu “madde dışı”, ordinal olarak bütününde bir-olarak-sayılan maddenin kendisidir.

Üç durumumuzda temellendirilen (ayırtaç $D(N_1)$ ve $F(N_2)$ ’de olduğunda; $D(N_1)$ ve $hM(N_2)$ ’de olduğunda; $hM(N_1)$ ve $F(N_2)$ ’de olduğunda) $N_1 < N_2$ bağıntısı, doğal maddede bir biçimin kesmesi olarak Sayının varlığına temellendirilmiş bir hiyerarşi kaydeder.

13.12 Şimdi $N_1 < N_2$ bağıntısının, terimin matematiksel anlamıyla gerçekten bir sıralılık bağıntısı olduğunu tesis etmek gerekiyor: yani Sayıları seri haline getirdiğini. Bu ise şu üç soruya olumlu yanıt vermeye karşılık gelir:

1) Bağıntı *tam* mıdır?² Ya da: N_1 ve N_2 gibi herhangi iki farklı Sayı verildiğinde daima ya $N_1 < N_2$ ya da $N_2 < N_1$ oluyor mu?

2) Bağıntı *yansımayan* bir bağıntı mı? Ya da: $N_1 < N_1$ elde etmek imkânsız mı?

2 Kitap boyunca, bağıntımm iki farklı terimi daima bu bağıntıyla birbirine bağlandığında bir bağıntımm (çoğunlukla sıralılık bağıntısmm) “tam” olduğunu söyleyeceğim. Böylelikle ordinaller üzerinde $\in$ bağıntısının veya Sayılarda $<$ bağıntısının tam olduğunu söyleyeceğim.

Bazı zamanlar ayrıca yansıyan, yani her terimi kendisine bağlayan bir bağıntı da “tam” bağıntı olarak adlandırılır. Örneğin doğal tam sayılarda $\leq$ (küçük veya eşit) bağıntısı böyledir.

Yalnızca farklı terimler için bağ gerektiren ve kendisinin kendisiyle bağıntı (yansıyan bağıntı) dışlayan benim tanımıma bağlı kalmak ilgilendiğimiz meselede daha pratik olacaktır. Bir sıra bağıntısı söz konusu olduğunda bu, sıralılık aksiyomlarınm kesin sıralılık aksiyomları olduğu anlamına gelir.

3) Bağıntı geçişli midir? Ya da: $N_1 < N_2$ bağıntısı ve $N_2 < N_3$ bağıntısı $N_1 < N_3$ bağıntısını gerektiriyor mu?

Bu üç nokta ispatlanırsa 13.11'de ortaya konan felsefi meşrulukla matematiksel (dolayısıyla ontolojik) meşruluğu çakıştırmış oluruz. Ya da daha ziyade, Sayıların sıralılığıyla ilişkili olarak, hep içinde kalmaya çabaladığımız durumu elde etmiş olacağız: “Matematik ontolojidir” şeklindeki felsefe önerme çerçevesinde söylenenlerin, matematiksel çıkarımlar zinciri çerçevesinde söylenenlerle uyum içinde kalabileceği durum. Ya da varlık olarak varlığın bilimi sıfatıyla matematiğin yorumlanışının gerçekte temas noktasının, böyle bir bilimin fiilî düşüncelerini örnek aldığı durum.

13.13 $<$ bağıntısı tamdır.

$N_1 < N_2$ eşitsizliği için durum tablosuna son bir kez daha bakalım. Bu tablo N_1 ve N_2 'nin ayırtacının konumunu sabitler.

	N_1	N_2
1. durum	D	F
2. durum	hM	F
3. durum	D	hM

Bağıntının tam olduğunu göstermek, iki farklı Sayı verildiğinde bunlardan birinin daima diğerinden “daha küçük” olduğunu göstermektir.

N_3 ve N_4 rastgele seçilmiş iki Sayı ve w bunların ayırtacı olan ordinal olsun. Üç durum mümkündür:

- Ayırtaç w , N_3 'ün atığındadır. Bu durumda,

a) ya N_4 'ün biçimindedir ve $N_3 < N_4$ olur (bkz. tablo);
 b) ya N_4 'ün maddesinin dışındadır ve $N_3 < N_4$ olur (yukarıdaki gibi).

- Ayırtaç w , N_3 'ün biçimindedir. Bu durumda,

a) ya N_4 'ün atığındadır ve $N_4 < N_3$ olur (yukarıdaki gibi);

b) ya N_4 'ün maddesinin dışındadır ve $N_4 < N_3$ olur (yukarıdaki gibi).

- Ayırtaç w , N_3 'ün maddesinin dışındadır. Bu durumda,

a) ya N_4 'ün biçimindedir ve $N_3 < N_4$ olur (yukarıdaki gibi);

b) ya N_4 'ün atığındadır ve $N_4 < N_3$ olur (yukarıdaki gibi).

Bütün durumları tükettiğimizde N_3 ve N_4 Sayıları arasındaki $<$ bağıntısının her zaman tanımlı olduğunu görüyoruz. Bu bağıntı, Sayılar alanında tamdır, $<$ ile birbirine bağlanmayan iki farklı Sayı yoktur.

13.14 Sayılar arasındaki eşitsizlikler hakkında daha hızlı akıl yürütme alışkanlığını kazanmak iyi bir şey. Örneğin şöyle diyebiliriz: w ayırtacı iki Sayıdan birinin atığındaysa tablo (tek mümkün olan 1. ve 3. durumlar) söz konusu Sayının diğerinden daha küçük olduğunu gösterir. Eğer w iki Sayıdan birinin biçimindeyse tablo (tek mümkün olan 1. ve 2. durumlar) söz konusu Sayının diğerinden daha büyük olduğunu gösterir. w 'nin iki Sayıdan birinin maddesinin dışında olduğu durumu bir kenara bırakmışız gibi görünüyor. Fakat hayır, çünkü illa diğerinin atığında veya biçiminde olmalıdır (her ikisinin maddesinin dışında olsaydı bunları ayırmazdı) ve böylelikle önceki durumlardan birine geri döneriz.

İki Sayıyı $<$ bağıntısıyla karşılaştırmak için şu şekilde ilerleyeceğiz: Önce ayırtacın ikisinden birinin biçiminde olup olmadığına bakacağız, eğer öyleyse o Sayının daha büyük olduğu sonucuna hemen varabiliriz. Durum böyle değilse, ikisinden birinin atığında olup olmadığına bakacağız; eğer öyleyse o Sayının daha küçük olduğu sonucuna varabiliriz. İşimiz bitmiştir, başka mümkün durum yoktur.

13.15 $<$ bağıntısı, yansımayan bir bağıntıdır.

Bu nokta önemsizdir. $N_1 < N_1$ olamaz, çünkü bağıntı, ayırtacın varlığı ve konumu üzerine temellenir; ayırtacı N_1 ile kendisi “arasında” var olamaz.

13.16 Sayıların $<$ bağıntısıyla kıyaslanmasında alıştırma yapmak için 13.6’daki örneklerimizi kullanalım. Madde ve biçim çifti yoluyla notasyonu kullanarak aşağıdaki dört Sayıyı elde etmiştik:

$$N_1 = (2, (0))$$

$$N_2 = (\omega, 2)$$

$$N_3 = (S(\omega), \omega)$$

$$N_4 = (S(S(\omega)), \omega)$$

N_1 ile N_2 ’nin ayırtacı (0)’dır. N_1 ’in atığında ve N_2 ’nin biçimindedir. Dolayısıyla $N_1 < N_2$.

N_3 ile N_4 ’ün ayırtacı $S(\omega)$ ’dir. N_3 ’ün maddesinin dışında ve N_4 ’ün atığındadır. Dolayısıyla $N_4 < N_3$.

N_3 ile N_1 ’in ayırtacı (0)’dır. N_1 ’in atığında ve N_3 ’ün biçimindedir. Dolayısıyla $N_1 < N_3$.

N_4 ile N_2 ’nin ayırtacı 2’dir (neden?). N_2 ’nin atığında ve N_4 ’ün biçimindedir. Dolayısıyla $N_2 < N_4$.

Okur geri kalan karşılaştırmaları kendisi yapabilir.

Bir Sayının büyük olmasının nedeninin, o Sayının maddesinin “daha büyük” olmasıyla ilgili olmadığı fark edilecektir. Nitekim N_4 ’ün ordinal-maddesi, ω ’nin ardılının ardılıdır ve bu da, N_4 ’ün maddesi olan ω ’nin ardılından daha büyüktür. Gelgelelim, $N_4 < N_3$.

Bu örnekte daha da çarpıcı olan N_3 ile N_4 ’ün biçiminin aynı olmasıdır (ω ’dir). Öyleyse şu “yasa”yı elde edebiliriz: *Biçim aynı kalırken madde artarsa Sayı azalır*. Genel durumda böyle olduğunu ispatlamak aslında kolaydır. (W_1, X) bir N_1 sayısı ve (W_2, X) bir N_2 sayısı olsun; $W_1 \in W_2$ ve X aynı ordinaller kümesi olsun (yani W_1 ve W_2 ’nin ortak bir parçası). Bu iki Sayının ayırtacı ikisinin de biçiminde bulunamaz, çünkü aynı X biçimine sahiptirler: X ’in bir elemanı onları ayıramaz (N_1 ve N_2 için konumları aynıdır, yani biçimdedirler). Dolayısıyla birinin atığında ve diğerinin maddesinin dışındadır. Ayırtacın, W_1 ’e ait olmayan ve W_2 ’de olan (çünkü $W_1 \in W_2$) en küçük ordinal olan W_1 ’in ta kendisi olduğu açıktır. W_1 zorunlu olarak N_2 ’nin atığında (çünkü maddesine ait olsa da X ’e, yani biçimine ait değildir) ve N_1 ’in maddesinin dışındadır. Bundan dolayı, $N_2 < N_1$.

Bu, bir (W, X) sayısını $\frac{X}{W}$ oranına yakınlaştırır. Nitekim bu oranın, W paydasının artırılmasıyla *azaldığını* biliyoruz. Fakat dikkatli olalım; bu çok uzak bir analogi, zira $\frac{X}{W}$ burada hiçbir anlama gelmez.

Yine de bu analogiden ilham alarak, *madde aynı kalır ve biçim artarsa –eski X biçiminin, yeni X ’ biçiminde içilmesi anlamında– Sayının artacağı* ispatlanabilecektir. Bu kez “oranı” artıran “pay”ın artmasıdır. Bu ispatın ayrıntılarını okura bırakıyorum. Sadece ayırtacın X

biçimine ait olan ve X biçimine ait olmayan en küçük ordinal olduğuna işaret etmek yeterli: Ayırtaç ikinci sayının biçiminde ve birincisinin atığındadır; dolayısıyla ikincisi daha büyüktür.

Bu tespitler felsefi bakımdan temellendirilmiştir. Daha büyük bir maddeden aynı biçimi üretmek aslında ne demektir? Sayısal kesme jestinin büyük bir maddeden (daha büyük bir ordinalden) aslında daha az bir maddeyle elde edilebilecek bir biçimi çekip çıkarabildiği anlamına gelir. Dolayısıyla bu jest daha az yoğun, daha az zarif, daha az etkilidir. Bu jesti işaretleyen Sayının daha aşağı olarak düşünülmesi meşrudur. Bunun tersi de açıktır: Baştaki maddeyle daha geniş, ilkinin elemanlarının yanı sıra başkalarını da kapsayan bir biçim elde etmek, daha etkili bir kesme hareketi teşkil eder. Daha üstün bir Sayıyla işaretlenmesi meşrudur.

Dolayısıyla $<$ bağıntısı matematik alanında Sayıların karşılaştırılmasının ontolojik bakımdan rasyonel düzenlenişini ifade eder.

13.17 $<$ bağıntısı geçişlidir.

N_1 , N_2 , ve N_3 Sayıları verildiğinde, $N_1 < N_2$ ve $N_2 < N_3$ ise o halde $N_1 < N_3$ olduğunu göstermek söz konusudur. Her şey elbette ayırtaçların konumuna bağlı olacak. N_1 ile N_2 'nin ayırtacını $w(1,2)$, N_2 ile N_3 'ün ayırtacını $w(2,3)$ ve N_1 ile N_3 'ün ayırtacım $w(1,3)$ ile göstereceğiz.

a) *Birinci aşama.* $w(1,2)$ ve $w(2,3)$ 'ten daha küçük olan bir ordinal N_1 ile N_3 'ü ayırmaz.

İki Sayının ayırtacı, bu iki Sayıyı ayıran *en küçük* ordinaldir (ordinallerin sıralılığı, yani ait olmaya göre).

Eğer bir W ordinali $w(1,2)$ 'den daha küçükse N_1 ile N_2 'yi ayırmaz. Konumu $(F, D$ veya $hM)$ N_1 ve N_2 'de aynıdır. Aynı zamanda $w(2,3)$ 'ten de daha küçükse N_2 ile N_3 'ü de ayırmıyor demektir. Konumu N_2 ve N_3 'te aynıdır. Dolayısıyla konumu N_1 , N_2 ve N_3 'te aynıdır ve N_1 ile N_3 'ü ayırmaz.

b) Birinci aşamanın sonucu: N_1 ile N_3 'ü ayıran $w(1,3)$, $w(1,2)$ ve $w(2,3)$ 'den daha küçük olamaz. Dolayısıyla *en azından bu ikisinden en küçük olana eşittir.*

c) İkinci aşama. $w(1,2)$ ve $w(2,3)$ ordinallerinin en küçüğü N_1 ile N_3 'ü ayırır.

Gösterim açısından pratik olması amacıyla bu en küçük ordinalin $w(1,2)$ olduğunu varsayalım ($w(2,3)$ olsaydı da akıl yürütme tarzı tamamen aynı olacaktır; okur için harika bir alıştırmadır). $w(1,2)$ N_1 ile N_2 'yi ayırdığı için N_1 'deki konumu N_2 'deki konumundan farklıdır. Fakat $w(2,3)$ 'ten küçük olduğu için N_2 ile N_3 'ü ayırmaz, zira N_2 ile N_3 'ün ayırtacı olan $w(2,3)$ bu iki Sayıyı ayıran en küçük ordinaldir. Dolayısıyla $w(1,2)$ 'nin N_2 ve N_3 'teki konumu aynıdır. N_2 'deki konumu N_1 'dekinden farklı olduğu için, N_3 ve N_2 'de konumu aynıysa, N_3 'teki konumu da N_1 'dekinden farklı olacaktır. Dolayısıyla $w(1,2)$ N_1 ile N_3 'ü ayırır.

d) Üçüncü aşama. N_1 ile N_3 'ün ayırtacı, yani $w(1,3)$ gerçekten de $w(1,2)$ ve $w(2,3)$ ordinallerinin en küçüğüne eşittir.

$w(1,3)$ 'ün en azından $w(1,2)$ ve $w(2,3)$ ordinallerinden en küçüğüne eşit olması gerektiğini gördük (birinci aşama). En küçük ordinalin $w(1,2)$ olduğunu varsaydık. Dolayısıyla $w(1,3)$ en azından $w(1,2)$ 'ye eşit

olacaktır. Oysa $w(1,2)$, N_1 ile N_3 'ü ayırır (ikinci aşama). $w(1,3)$, N_1 ile N_3 'ün ayırtacı, dolayısıyla bunları ayıran en küçük ordinal olduğu ve N_1 ile N_3 'ü ayıran $w(1,2)$ 'den daha küçük olamayacağı için, $w(1,2)$ 'ye eşittir. $w(1,3) = w(1,2)$.

e) Ek not. Diğer türlü, yani $w(2,3)$ 'ün en küçük olduğunu varsaysaydık aynı nedenlerle $w(1,3) = w(2,3)$ olduğunu bulurduk.

f) *Dördüncü ve son aşama.* $w(1,3) = w(1,2)$ olduğunu biliyoruz. Bu şu şekilde ifade edilebilir: N_1 ile N_2 'nin ayırtacı olan $w(1,2)$ aynı zamanda N_1 ile N_3 'ün de ayırtacıdır.

$N_1 < N_2$ olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla $w(1,2)$ 'nin iki Sayıdan en küçüğü olan N_1 'deki konumuna dair iki mümkün durum vardır:

-Ya $w(1,2)$, N_1 'in atığındadır. Fakat bu durumda N_1 ile N_3 'ün de ayırtacı olduğu için N_1 'in atığındaki konumu $N_1 < N_3$ olduğu sonucuna varmamıza neden olur (bu konuda, bkz. 13.14).

- Ya da $w(1,2)$, N_1 'in maddesinin dışındadır. Bu durumda mutlaka N_2 'nin biçiminde olmalıdır, çünkü $N_1 < N_2$. Fakat $w(2,3)$ 'ten küçük olan $w(1,2)$, N_2 ile N_3 'ü ayırmaz. Dolayısıyla aynı zamanda N_3 'ün biçiminde olmalıdır. N_1 ile N_3 'ün ayırtacı olduğu için, N_1 'in maddesinde ve N_3 'ün biçiminde olduğuna göre, $N_1 < N_3$ olduğu sonucu çıkar.

$N_1 < N_2$ ve $N_2 < N_3$ ise o halde $N_1 < N_3$ olduğunu ispatlamış olduk. Bir bonus olarak daha incelikli bir sonuç da elde etmiş olduk: N_1 ile N_3 'ün ayırtacı, N_1 ile N_2 'nin ve N_2 ile N_3 'ün ayırtaçları arasında en küçük olanına eşittir.

13.18 İnatçı bir okurla yukarıdaki ispata ilişkin bir diyalog:

OKUR: Baştan sona N_1 ile N_3 'ün ayırtacının *var olduğunu* varsayıyorsunuz. Bu hiç de açık değil. $N_1 < N_2$ olduğu için N_1 ile N_2 'nin ayırtacının *var olduğunu* görüyorum. N_2 ile N_3 'ün ayırtacı için de aynısı geçerli. Fakat nihayetinde $N_1 = N_3$ olması gayet mümkün ve bu durumda $w(1,3)$ ayırtacı olmayacaktır. Bağıntı bir döngü olacaktır: $N_1 < N_2 < N_1$.

BEN: Bu saçma. N_1 ile N_2 'nin ayırtacı, $N_1 < N_2$ olacak şekilde N_1 ve N_2 'de konumlanmışsa $N_2 < N_1$ olamaz. Dolayısıyla N_1 zorunlu olarak N_3 'ten farklıdır ve bunların ayırtacı vardır.

OKUR: Tamam kabul ediyorum, fakat hâlâ tatmin olmuş değilim. İkinci aşamanızda $w(1,2)$ ve $w(2,3)$ ayırtaçlarından birinin aralarında en küçük ayırtaç olduğunu varsayıyorsunuz. Fakat bu ikisinden birinin en küçük olmaması mümkün olabilir: Bunun için *eşit olmaları* yeterlidir. Beni kandırınanıza izin vermek istemediğim için size bir örnek hazırladım. Aşağıdaki üç Sayıyı düşünün:

- N_1 , maddesi 2 ve biçimi 1'in tekliği olan $(2,(1))$ Sayısı olsun. Yazdıklarınızı okudum ve 1 ordinalinin 2 ordinalinin bir elemanı olduğunu (bkz. 11.5) ve bir elemanın tekliğinin bir parça olduğunu (bkz. 7.11) biliyorum. Dolayısıyla elimizde bir ordinal ile o ordinalin bir parçasından oluşan bir çift olduğuna göre bu gerçekten de bir Sayıdır (bkz. 12.11).

- N_2 , maddesi boşluk ve biçimi boşluk olan $(0,0)$ Sayısı olsun. Bu da bir Sayıdır! Çünkü madde olan 0 bir ordinaldir ve 0 her kümenin evrensel parçasıdır

(bkz. 7.9) ve buna bir küme olduğunu bildiğim 0'ın kendisi de dahildir. Öyleyse 0, biçim için de uygundur.

- N_3 , (2,1) Sayısı olsun. Karşı çıkmanız mümkün değil, çünkü 2 bir ordinaldir ve 2'nin bir elemanı olan (yine 11.5) 1 onun bir parçasıdır, çünkü her ordinal geçişlidir.

Fakat o da ne! N_1 ile N_2 'nin ayırtacı 0'dır: 0, 2'nin maddesinin elemanı olsa da, (1) tekliğinin tek elemanını 1 olduğuna göre biçimde yer almadığı için N_1 'in atığındadır. Ayrıca N_2 'nin maddesinin dışındadır, çünkü bu madde 0'dır ve 0 onun bir elemanı olamaz. Öyleyse $N_1 < N_2$.

N_2 ile N_3 'ün ayırtacı yine, biraz önce gördüğümüz gibi N_2 'nin maddesinin dışında olan ve $0 \in 1$ olduğu için N_3 'ün biçiminde olan 0'dır. Bundan dolayı, $N_2 < N_3$ olur.

İşte size $N_1 < N_2$ ve $N_2 < N_3$ olduğu halde, 13.7'deki notasyonlarımızı kullanırsak $w(1,2)$ ile $w(2,3)$ 'ün eşit olduğu somut bir durum. Dolayısıyla aralarından biri daha küçük değildir ve böylelikle akıl yürütme yönteminiz çöker.

BEN: Zekice! Neticede örneğinizde geçişliliğin doğrulandığını teslim ediyorsunuz. Zira N_1 ile N_3 'ün ayırtacı, N_1 'in atığında ve N_3 'ün biçiminde olan 0'dır. Öyle ki $N_1 < N_3$ elde edilir.

OKUR: Ben size ilke üzerinden bir itiraz yöneltiyorum, siz ise ampirik bir yorumla yanıt veriyorsunuz! Verdiğim örnek, N_1 ile N_2 ve N_2 ile N_3 arasında en küçük ayırtacın *daima* tespit edilebileceği olgusuna dayanan genel akıl yürütme tarzınızı tahrir ediyor. Size böyle

yapamayacağımız bir durum gösteriyorum. Bu durumda geçişliliğin belki şans eseri geçerli olması sizin hiçbir şey ispatlamamış olduğunuzu gösterir.

BEN: Yine de $w(1,3)$ 'ün, $w(1,2)$ ve $w(2,3)$ 'den daha küçük olamayacağını söylediğim birinci aşamamı kabul ediyorsunuz, değil mi?

OKUR: Eşit iki ayırtacı birbirine bağlaması mümkün olduğu için, bu “ve”nin bana biraz kuşkulu görünmesi haricinde evet. Örneğime baktığınızda bu ifade “ $w(1,3)$, 0’dan ve 0’dan küçük olamaz” olacaktır, ki bu da saçmadır.

BEN: Ayrıca 0’dan küçük olması da... Ama neyse. Fakat $w(1,2)$, örneğinizde olduğu gibi $w(2,3)$ 'e eşitse, $w(1,3)$ 'ün $w(1,2)$ yani $w(2,3)$ 'ten daha küçük olamayacağını kabul ediyor musunuz? Çünkü bu ortak ayırtaçtan daha küçük hiçbir ordinal N_1 , N_2 ve N_3 'ü ayırmaz.

OKUR: Elbette.

BEN: Fakat $w(1,2)$, N_1 ile N_2 'yi ayırdığına göre N_1 'deki konumu N_2 'deki konumuyla aynı olamaz değil mi?

OKUR: Nasıl aynı olabilir ki?

BEN: Ayrıca eşit olduğu $w(2,3)$ adıyla N_2 ile N_3 'ü de ayırır ve konumu ikisinde aynı değildir, öyle mi?

OKUR: Ben de aynen böyle dedim.

BEN: Bu konumları biraz inceleyelim. $N_1 < N_2$ olduğu için $w(1,2)$ N_1 'in ya atığında ya da maddesinin dışında olacaktır. Fakat maddesinin dışında olabilir mi?

OKUR (biraz düşündükten sonra): Olamaz. Çünkü N_1 'de madde dışında olsaydı, N_2 'nin biçiminde olmak

zorunda olurdu, zira $N_1 < N_2$ olduğunu biliyoruz. Fakat N_2 ile N_3 'ün ayırtacı da o olduğu ve $N_2 < N_3$ olduğu için, 13.14'te açıklandığı gibi N_2 'nin biçiminde de olamaz. Dolayısıyla N_1 'in atığında olmalıdır ve...

BEN: ... N_2 'nin biçiminde olmadığına göre maddesinin dışında olmalıdır. Fakat N_3 'te nasıl bir konumu vardır?

OKUR (biraz düşündükten sonra): Biçimde. Çünkü aynı zamanda $w(2,3)$ de olan bu $w(1,2)$, N_2 ile N_3 'ün ayırtacıdır. N_2 'nin maddesi dışında olduğu ve $N_2 < N_3$ olduğu için N_3 'ün biçiminde olmalıdır.

BEN: Harika! İşte $w(1,3)$ 'ün daha küçük olamayacağı ve N_1 'in atığında ve N_3 'ün biçiminde bulunan bir $w(1,2)$. Dolayısıyla N_1 ile N_3 'ü ayırır. Bu da...

OKUR: Tamam tamam, anladım. Zaten $w(2,3)$ 'le özdeş olduğu için $w(1,3)$ 'le de özdeş olmalıdır. Ve bu genel ayırtaç (N_1 ile N_2 'nin, N_2 ile N_3 'ün ve N_1 ile N_3 'ün ayırtacı) N_1 'in atığında ve N_3 'ün biçiminde olduğu için bu özdeşlik $N_1 < N_3$ olmasını gerektirir. Anlaştık.

BEN: Örneğinizin tam da söylediği bu: 0, N_1 - N_2 ve N_2 - N_3 çiftlerinin ortak ayırtacıydı. Ayrıca N_1 ile N_3 'ün de ayırtacıdır. N_1 'in atığında, N_2 'nin maddesinin dışında ve N_3 'ün biçiminde konumlanmıştır. Bu da $N_1 < N_2 < N_3$ zincirini dayatır.

OKUR: Yine de anlattıklarınıza bir sürü ekleme yapmak zorunda kaldınız.

BEN: Bu akıl yürütmenin bir alt bölümüydü, ama ilke aynıdır. Fakat matematikte atlayarak ilerlememek lazım, çünkü neyi atladığımızı *bilmeyiz*.

13.19 $<$ bağıntısı tam, yansımasız ve geçişli olduğu için matematiksel anlamda bir sıralılık bağıntısıdır. N_1 ile N_2 'nin ayırtacının konumuyla $N_1 < N_2$ bağıntısının geçerli olduğunu doğruladığımızda “ N_1 , N_2 'den küçüktür” dememizi tamamen meşrulaştırmış olduk.

Dolayısıyla göreceğimiz gibi her ne kadar sınırsız, ona kıyasla meşhur “süreklilik” ufak ve delikli kalacak kadar tarif edilemez düzeyde bir yoğunlukla doymuş olursa olsun Sayılar evreni yine de bir sıralılığın seri yasası kapsamında bütünüyle kavranabilir.

Ayrıca bu sıralılığın, üç olanaklı sahaya (F, D ve hM) ilişkili olarak yalnızca bir ordinalin (ayırtıcı) konumunun incelenmesine dayanması, Sayılar evrenini düşünme kapasitemize dair güvence veren bir sadeliktedir.

Bu sıralılığın, bir minimum mantığı (iki Sayının farkını işaretleyen en küçük ordinal olarak ayırtıcı) ile bir konumlar mantığını (sayısal kesmenin üç bileşeni) bir araya getirmesiyle sözlük sıralamasına benzemesi çok çarpıcıdır. Ayrıca saf matematiksel gösterimlerde de bu biçimde sunulur.³

Fonik veya yazısal birimlerin bir alfabetine başvurarak kelimeleri düzenleyen sözlük sıralaması, Lacan'da çok önemli olan gösteren ile harf arasındaki farkla ilişkilidir.⁴ Gerçekten de Sayı bir gösteren gibidir ve içsel “pozisyonları” üç konumdur: madde, biçim ve atık.

3 Gonshor için sıralılık kolaylıkla sözlüksel olarak sunulur, çünkü sür-reel sayılar bir + ve – göstergeleri dizisi olarak sunulur (bkz. 12. bölüm, n. 1).

4 Bu konuda, bkz. J.-C. Milner, *Libertés, Lettre, Matière*, Perroquet konferansı, Paris, Haziran 1985.

Harfleriye ordinallerdir. Tek başına bu, ordinallerden oluşan her türlü kümeyi, ordinal “kelimeleri” gibi o kadar anarşik bir şeyi sıra düzenine sokmamıza olanak verir.

Şayet Sayı, varlığında yakalanan Doğanın düşünce-mize kendisini açtığı ortamsa, bunun delili kuşkusuz Sayıların sıralılığıdır, çünkü bir ve üçün basit biçimi aracılığıyla Sayının gerçekleştirdiği kesmede, Galileo’dan bu yana materyalizmin hakiki sahası olarak tanınan, pozisyon ile harfin o diyalektiği vardır. Doğa, bir yazının kurmacasında kendisini savurganca vermemi kabul eder ve Sayıda varlığın en *kaydedilmiş* örneğini tanımak gerekir:

iki parmak
şıklıyor boşlukta,
müsvedde defterlerinde
dünya kımıldıyor, her şey
sadece sana bağlı⁵

5 Paul Celan, *Enclos du temps [Zeitgehöft]*, çev. M. Broda, Clivages, 1985.

14. Alt-Sayı kavramı

14.1 Alt-yapı kavramı, hatta (kategoriler teorisinde⁶) alt-nesne kavramı çağdaş matematiğin bütün kısımlarında temeldir. Bir grubun alt-gruplarının, topolojik bir uzamın alt-uzamlarının, vb. belirlenmesinin büyük önemi bilinir. Yakın zamandaki matematiğin en derin teoremlerinin büyük bir kısmı, ayrışım veya sunum teoremleridir: bir yapının nihayetinde daha basit alt-yapıların bileşimi olarak sunulmaya olanak verdiğini veya bir yapının dizi ya da daha önce tanımlanmış yapıların ürünü olarak ayrıştırılabildiğini ispatlamak. Aksiyomatik olarak sunulan bir yapıyı aynı türden ama daha basit alt-yapılar halinde tamamen “çözmeyi” başardığımızda düşüncenin zarafeti zirve noktasına çıkar. Sonlu grup teorisi böyle çözümlere enfes örnekler sağlar.

Temeldeki fikir şudur: Matematiğin “maddesi” saf veya farksız çokluk olduğu için yapılar kaçınılmaz olarak yapılanmış kümelerle homojendir. Matematiksel

6 Kategoriler teorisi tüm matematiği küme teorisel olmayan yapısal bir çerçevede tekrar formüle etmeye çalışır ve kalkış noktası “yapı türleri” olan “nesneler” ve yapılar arasında uygulamalar veya morfizmler olan “oklar”dır. Alt-yapı kavramı böylelikle alt-nesne kavramına tercüme edilebilir. Bir “alt-nesne” aslında belirli oklar için bir denklik sınıfıdır. Örneğin, bkz. J. L. Bell, *Toposes and local set theories*, Oxford, Clarendon Press, 1988, özellikle sayfa 49-58 arasındaki argümanlar.

ontoloji üniterdir: Bir yanda önceden verilmiş “nesneler” ve öte yanda bu nesnelerin eklemlendiği yapısal bağlantılar yoktur. Potansiyel olarak her şey, sırf boşluktan örülü olan niteliksiz çokluğa indirgenebilir. Dolayısıyla düşüncenin tatbikinin, basit ve karmaşığa dair aksiyomatik tanımın mecrasında karmaşık çokluklardan daha basit çokluklara götürmekten oluşması kaçınılmazdır. Yapı kavramı söz konusu mecrayı düzenler: Temel yapılandırmalar ile daha girift yapılandırmaları ayırt eder. Son olarak varlık olarak varlığa dair düşüncenin stratejik meselesi, her çokluk *çokluklar* çokluğu olduğu için (Bir’in hiçbir varlığı yoktur), sunulan bir çokluğun hangi çoklukların sunumunu temin ettiğini ayırt etmektir. Ayrışım, çözme veya sunum teoremleri buna dayanır.

Bir matematikçinin “nesne” diye adlandırdığı, alt-çoklukları çoğunlukla çok opak bir tarzda birbirine dolayan bir çokluktan ibarettir. Nesne, dolamlılığı düşünceye engel olan ve “nesne”nin sunumsal kombinasyonunu temin ettiği çoklu-bölgelere mümkün olduğunca *ayrıştırılması* gereken bir çokluklar paketidir. Nesne fantazması olarak adlandırılabilen “nesnel” illüzyon, çoklukların birbirine dolanıklığı ile dil mecrasında *bizim* bu dolanıklığa ayrıştırıcı erişimimiz arasındaki ilk mesafeden kaynaklanır. Aksiyomatik olarak sunulan kavramlar, ayırma işlemcileri olan yapı türlerini belirler ve bir “nesne”yi alt-yapıların eklemlenmesi olarak sergilemeye olanak verir; bu alt-yapılarsa dil mecrasına bağlarında alt-çoklukların gizil olarak var olduğunu gösterir.

Bir yapının çeşitli kombinasyon işlemcilerine (alt-gruplardan oluşan iç içe geçmiş diziler, kompakt uzamların sonu veya sonsuz ürünleri, vb.) göre alt-yapılar olarak çözülebilmesi düşüncenin *kaydedilmiş* stratejisinde karşı karşıya kaldığı şeyin, saf çoklukların sonsuz dolanıklığı figüründe varlık olarak varlık olduğu gerçeğinin kati işaretidir. “Nesne”sinin sunumsal düğümünü başlangıçta opak bir tarzda gizlediği alt-yapılarla bağlantılı içkinliği saptadığında bir matematikçi “nesneyi düşündüğünü” (ya da “problemi anladığını”) söyleyecektir. Ayrıca, sadece kurucu giriftliği sayesinde kesin yapılar çeşitliliğine çözülüşüne direnmesiyle nesne olan nesnenin bir ayrışımı, nesne fantazisinin öldürülmesi söz konusudur. Düşünce alt-yapılar aracılığıyla *nesneyi azleder* ve yüzünü varlığa döner.

- 14.2 Yaygın kabulünde *sayı kavramı yapısal türde değildir*. Grup veya vektörel uzamdan söz edildiği gibi “sayısal yapı”dan söz edilmez. Günümüzde “sayı teorisi” olarak adlandırılan olgu, ağırlık merkezi aslında cebirin bir kısmı –halkalar teorisi ve idealler teorisi– olan tutarsız bir kümedir. Bilhassa, “sayı” bir yapı türünü belirtmediği için alt-sayı kavramı yoktur.

Sonuç olarak, sayı kavramı Antik Yunan’dan bu yana matematiğin gerçekçi, hatta ampirist vizyonunun ana sığınağı olagelmıştır. Sayı ya “verili” bir kendilik gibi alınır ya da matematiksel adlandırmaların yalnızca simgesel veya işlemsel bir değeri olduğunun kanıtı olarak düşünülür. Salt cebirsel ele alınışıyla ilişkili olarak “sayı” kendiliği, kendi üzerine kapanır. Sayılar elbette cebir kurallarına göre birleştirilirler. Fakat $7 + 5 = 12$

olmasından (bu ifade ister analitik ister sentetik olsun) 7 ve 5'in, 12'nin "alt-yapıları" olduğu sonucu çıkmaz. Nesnelliğin en inatçı illüzyonu, seri üretimi tutarlılığını temin eden 7, 5 ve 12'nin ayrıştırılamaz işaretler olduğu kanısındır.

Dolayısıyla sayının yapısal karakterini ortaya koymak, ampirik noktasallığıyla bağlarını kesmek, sayıyı basit nesne biçiminde koparıp almak matematiğe dair ontolojik bir vizyon için büyük bir zafer olacaktır. "Sayı" yüklemine saf çokluğun repertuarı çıkarılabilen bir türü haline getiren bu program, en önemli anını alt-sayı kavramının belirlenmesinde yaşayacaktır. Bu kavram sayısallığı, matematiksel düşüncenin büyük yapısal kategorileriyle, düşüncenin sayesinde saf çokluğun dolamlıklım ayırdığı ve çözdüğü kategorilerle (grup, cisim, uzam...) aynı düzeye taşıyacaktır.

14.3 Sayı kavramının bizim giriştiğimiz haliyle küme teorisel sunumu gerçekten de belirli bir Sayının alt-Sayılarına dair kesin bir tanıma olanak verir. Daha da iyisi: Adım adım göstereceğimiz gibi, *bir Sayı alt-Sayıları tarafından tekanlamlı şekilde tanımlanır*. Sayının, o Sayıya içkin Sayılardan hareketle bir sunumu vardır. Böylelikle Sayı da ayrışım veya sunum teoremlerine olanak verir. Sayı yapılandırılır.

14.4 Alt-Sayı kavramı.

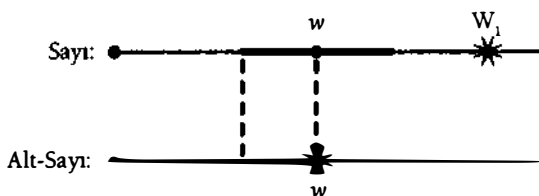
Alt-Sayıya dair genel fikir oldukça basittir: Belirli bir sayıyı maddesinin bir noktasında "bölümlersek" ve bu bölüm noktasından "önceki" her şeyi muhafaza

edersek bir alt-Sayı elde ederiz. Bir Sayının maddesi bir ordinal olduğu için bir bölümlleme “noktası” bu ordinalin bir elemanıdır, dolayısıyla daha küçük bir ordinaldir. “Bölümlemeden önce” gelenler, bölümlemeye dayanak olandan daha küçük ordinallerden oluşur. Fakat belirli bir ordinalden daha küçük ordinaller tam da söz konusu ordinalin elemanlarıdır. Eğer w bölümleme noktasıysa ondan önce gelenler w ’nin bütün elemanlarından oluşacağı için, w ’nin kendisinden başka bir şey değildir. Dolayısıyla w noktasında bölümleme yapıldığında, w olan yeni bir ordinal maddesi elde edilir; elbette kesme yaptığımızdan daha kısıtlı bir madde.

Fakat bu maddede sayısal kesme, biçim açısından ne olmaktadır? Burada da çok basit bir düşünce yürürlükte: Yeni Sayının biçimi olarak, bölümlenmiş Sayının biçiminde olan ve bölümlemeden “önce” gelen ordinaller muhafaza edilecektir. Bir alt-Sayı gerçekten de bir Sayının, bölümlenmiş Sayının bütün karakteristiklerini w ’ye kadar (dolayısıyla 0 ile w arasında) muhafaza eden w noktasındaki bir bölümü olacaktır.

Tüm bunlara daha kesin bir biçim verelim. $N_1 = (W_1, F(N_1))$ bir Sayı olsun ve w , $(N_1$ ’in maddesinde olan) W_1 ’e ait bir ordinal olsun. N_1 ’i geri kalan hiçbir şeyi değiştirmeyip sadece w ’den küçük ordinalleri muhafaza ederek w noktasında bölümleyelim: Yeni Sayının biçiminin elemanları $F(N_1)$ ’in w ’den küçük elemanları olacaktır. Burada bütün ordinal kümelerinin (dolayısıyla da her Sayının biçiminin) sahip olduğu özelliği kullanıyoruz (bkz. N3): Ordinallerden oluştuğu için elemanları $\in$ bağıntısıyla düzenlenecektir. Dolayısıyla

“ $F(N_1)$ ’in w ordinalinden küçük bütün ordinalleri”nden bahsetmek mantıklıdır. Aşağıdaki çizim (bkz. 12.4) bunu gösterir.



w ’nin elemanı olduğu bir E ordinaler kümesinin w noktasındaki bölümünü E/w ile gösterelim. E/w , sadece E ’nin w ’den küçük elemanlarını (ama dikkat, w ’nin kendisini *değil*) kapsar. N_1 ’in bölümlenmesiyle elde edilen ve notasyonumuzla N_1/w (bu, w ’nin N_1 ’in W_1 maddesinde olması, $w \in W_1$ elde etmemiz gerektiği anlamına gelir) olarak adlandıracağımız sayının kodu $(w, F(N_1)/w)$ şeklinde olacak. Maddesi bölümlenme noktası ve W_1 ’den önce gelen ordinal olan w ’dir ve biçimi, N_1 ’in biçiminin w ’den daha küçük olan bütün ordinallerinden oluşur. Aynı şekilde atığı, N_1 ’in atığında olan w ’den küçük bütün ordinallerden oluşur.

Bu $(w, F(N_1)/w)$ Sayısının, w ordinaline kadar (w hariç) tam da N_1 “gibi” olduğu fark edilecektir. Gerçekten de w ’ye kadar, N_1 ’in biçiminde olanlar $(w, F(N_1)/w)$ Sayısının da biçimindedir ve birincisinin atığında olanlar ikincisinin de atığındadır. Bölümlemeyle elde edilen yeni Sayı özetle N_1 ’in bir “ilk bölümlenmesi”, N_1 ’in “başlangıcı”nın tam kopyasıdır.

N_1 ve N_2 gibi iki sayı olsun. $N_1 = N_2/w$ olacak şekilde bir w ordinali varsa, yani N_1 w noktasında N_2 ’nin

bir bölümüyse N_1 'in, N_2 'nin bir *alt-Sayısı* olduğunu söyleyeceğiz. Ya da: N_1 'in bir alt-Sayısı, N_1 'in bir N_1/w bölümüdür.

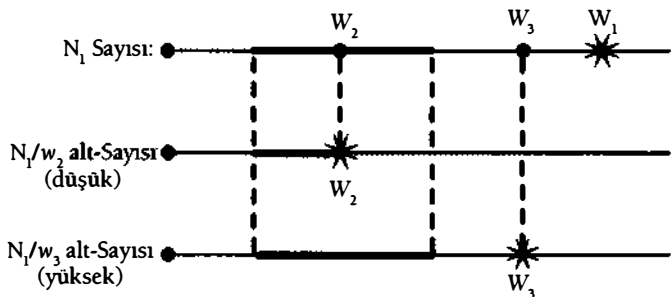
- 14.5 N_1 'in maddesinde bulunan her w ordinali için, dolayısıyla W_1 'in her elemanı için N_1 'in sadece ve sadece bir alt-Sayısı tanımlanabilir. Böylelikle N_1 'in tam W_1 tane alt-Sayısı vardır, zira bir ordinal kendisinden önce gelen ordinallerin “sayısını verir”. Genel olarak bir Sayı, maddesindeki ordinal kadar alt-Sayı alır.
- 14.6 N_1/w , N_1 'in bir alt-Sayısı olsun. w 'nin N_1/w ile N_1 'in ayırtacı olduğu açıktır (bkz. tanımlar ve çizim), çünkü w mertebesine kadar bu iki Sayı özdeştir. N_1/w 'nin maddesi w 'dir. Dolayısıyla w , N_1/w 'nin maddesinin dışındadır. N_1 ile N_1/w alt-Sayısı arasındaki sıralılık bağıntısı tamamen w 'nin N_1 sayısındaki konumuna, biçiminde veya atığında olmasına bağlı olacaktır.

Dolayısıyla belirli bir N_1 Sayısı için alt-Sayının iki türü vardır:

- N_1/w_2 alt-Sayıları: öyle ki, hem maddesi hem de bu alt-Sayılar ve N_1 arasında ayırtaç olan w_2 , N_1 'in *biçimindedir*. Bu alt-Sayılar N_1 sayısından *küçüktür* (w_2 ayırtacı N_1/w_2 'nin maddesinin dışında ve N_1 'in biçimindedir).

- N_1/w_3 alt-Sayıları: öyle ki, w_3 , N_1 'in *atığındadır*. Bu alt-Sayılar N_1 sayısından *büyüktür* (w_3 ayırtacı N_1 'in atığında ve N_1/w_2 'nin maddesinin dışındadır).

Birinci türdeki bir N_1/w_2 alt-Sayısı bir *düşük* alt-Sayı olarak adlandırılacaktır. İkinci türdeki bir alt-Sayı bir *yüksek* alt-Sayı olarak adlandırılacaktır. Aşağıdaki çizim bir düşük ve bir yüksek alt-Sayıyı göstermektedir:



N_1 'in biçimindeki (w_2 biçimde olmalıdır) elemanlar kadar düşük alt-Sayı olduğu ve N_1 'in atığındaki (w_3 atıkta olmalıdır) elemanlar kadar yüksek alt-Sayı olduğu aşikârdır.

N_1 'in düşük alt-Sayılarının kümesini N_1 Sayısının *düşük kümesi* diye adlandıracağız ve $Ba(N_1)$ ile göstereceğiz. Yüksek alt-Sayılar kümesini, N_1 Sayısının *yüksek kümesi* diye adlandıracağız ve $Ht(N_1)$ ile göstereceğiz.

14.7 En mühim nokta şu. N bir Sayı, $Ba(N)$ onun düşük kümesi ve $Ht(N)$ yüksek kümesi olsun. N , düşük kümesi ile yüksek kümesi olan Sayı kümeleri “arasında” yer alan *minimal maddeli biricik Sayıdır*.

Bu önerme tam olarak şu anlama gelir:

a) N , $Ba(N)$ ile $Ht(N)$ “arasında” yer alır; yani birinin bütün Sayılarından daha büyük ve diğerinin bütün Sayılarından daha küçüktür.

b) $Ba(N)$ ile $Ht(N)$ arasında yer alan bütün diğer Sayıların maddesi, N 'nin maddesinden daha büyüktür. Dolayısıyla N , düşük kümesiyle yüksek kümesi arasındaki aralığı işgal eden minimal maddeli biricik Sayıdır. Böylelikle bir N Sayısı, düşük kümesiyle yüksek küme-

si arasında bir “kesme”dir; “madde denk kabul edildiğinde” tanımlanmış bir kesme. $Ba(N)$ ve $Ht(N)$ şeklinde olan iki alt-Sayı kümesi, konumu (ikisi arasında) ve maddi minimallik üzerinden bizzat N 'yi tanımlar.

14.8 N 'nin düşük ve yüksek kümesi arasında olması elbette önemsizdir, zira tanım gereği bütün düşük alt-Sayılar N 'den küçüktür ve bütün yüksek alt-Sayılar N 'den büyüktür. Bütün mesele, N 'nin böyle konumlanmış Sayılar arasında minimal maddeye sahip olan tek Sayı olduğunu ortaya koymaktır.

14.9 *Ana lemma:* N_1 bir Sayı ve N_2 , N_1 'den küçük ve maddesi de N_1 'in maddesinden küçük olan başka bir Sayı olsun ($N_2 < N_1$ ve $M(N_2) < M(N_1)$). Bu durumda ya N_2 , N_1 'in düşük kümesinin bir Sayısıdır ya da N_2 ile N_1 arasında N_1 'in bir düşük küme Sayısı vardır.

w , N_1 ile N_2 'nin ayırtacı olsun. N_2 'nin maddesi N_1 'in maddesinden düşük olarak varsayıldığı için ve $N_2 < N_1$ olduğu için w zorunlu olarak N_1 'in biçimindedir (N_2 'nin atığında ve N_1 'in maddesi dışında olamaz çünkü bu durumda N_2 'nin maddesinde ve N_1 'in maddesi dışında olacaktır, fakat bu durum $M(N_2) < M(N_1)$ yüzünden imkânsızdır). N_1/w alt-Sayısını ele alalım. w , N_1 'in biçiminde olduğu için N_1 'in bir düşük alt-Sayısıdır (N_1 'den daha küçüktür).

w 'ye kadar (w hariç) N_1 ile N_2 özdeştir. w , N_2 'nin maddesi dışındaysa, yani maddesine eşitse N_2 , N_1/w alt-Sayısına eşittir, dolayısıyla N_1 'in bir düşük alt-Sayısıdır. Eğer w , N_2 'nin atığındaysa N_2 , N_1/w alt-Sayısından küçük demektir, zira N_1 ile N_2 , w 'ye kadar (w

hariç) özdeş olduğu için ve aynı zamanda w 'ye kadar (w hariç) N_1 'in w 'de bir bölümlemesi olan N_1/w 'ye de özdeş olduğu için N_2 ile N_1/w 'nin ayırtacı mutlaka w 'dir. Fakat w , N_1/w 'nin maddesi dışındadır ve biraz önce N_2 'nin atığında olduğunu varsaymıştık. Dolayısıyla $N_2 < N_1/w$.

Böylelikle N_2 'nin ya N_1 'in düşük bir Sayısı olduğu ya da N_1 'in düşük bir Sayısından küçük olduğu ispatlanmış olur.

14.10 Tamamen benzer bir akıl yürütme, $N_1 < N_2$ ise ve N_2 'nin maddesi N_1 'in maddesinden küçükse bu durumda ya N_2 , N_1 'in yüksek bir Sayısıdır ya da N_1 ile N_2 arasında N_1 'in yüksek bir Sayısı var olmalıdır.

14.11 Sonuç: N_1 'den küçük (benzer şekilde, büyük) her Sayı, eğer N_1 'in maddesinden daha küçük bir maddeye sahipse, ya N_1 'in düşük (benzer şekilde, yüksek) bir Sayısı olacağı ya da kendisiyle N_1 arasında düşük (benzer şekilde, yüksek) bir Sayı geleceği için bu Sayılardan hiçbirinin hem $Ba(N_1)$ ile $Ht(N_1)$ "arasında" yer alması (dolayısıyla Ba 'nın her elemanından büyük ve Ht 'nin her elemanından küçük olması) hem de N_1 'in maddesinden daha küçük bir maddeye sahip olması imkânsızdır. Bundan, düşük kümesiyle yüksek kümesi arasında yer alan N_1 'in, bu durumdaki bütün Sayılar bakımından minimal maddeye sahip olduğu sonucu çıkar.

14.12 Şimdi N_1 'in düşük kümesiyle yüksek kümesi arasında yer alan minimal maddeli *biricik* Sayı olduğunu ispatlayalım.

N_1 'in düşük ve yüksek kümesi arasında yer alan ve N_1 ile aynı maddeye sahip başka bir N_2 sayısının var olduğunu varsayalım. Bu durum, notasyonumuzu biraz zorlayarak, aşağıdaki gibi temsil edilebilir:

$$Ba(N_1) < N_2 < N_1 < Ht(N_1)$$

N_2 'nin maddesi N_1 'in maddesiyle aynı olduğu için N_1 ile N_2 'nin ayırtacı olan w zorunlu olarak N_2 'nin atığında ve N_1 'in biçimindedir. Bundan N_1/w alt-Sayısının N_1 'in düşük kümesinde olduğu sonucu çıkar. Bu alt-Sayı açıkça N_2 'den büyüktür (bir kez daha ayırtaçları w , N_2 'nin atığında ve N_1/w 'nin maddesinin dışındadır). Dolayısıyla N_2 'nin N_1 'in her düşük Sayısından daha büyük olduğu yanlıştır.

$$Ba(N_1) < N_1 < N_2 < Ht(N_1)$$

gibi bir sıralanma olsaydı benzer şekilde N_1 'in, N_2 'den daha küçük bir yüksek Sayısının var olduğunu gösterebilirdik (okur için iyi bir alıştırma).

Bundan, N_1 'in gerçekten de $Ba(N_1)$ ile $Ht(N_1)$ arasında yer alan minimal maddeli biricik Sayı olduğu sonucu çıkar.

“Madde denk kabul edildiğinde” –yani konum “arada” olarak sabitlendiğinde bu maddenin biricik minimallığı olarak– N_1 , düşük ve yüksek kümesi olan bu iki Sayı kümesinin kesmesiyle *tespit edilebilir*. Bunu şöyle yazacağız: $N_1 = Ba(N_1)/Ht(N_1)$. $Ba(N_1)/Ht(N_1)$ kesmesinin N_1 'in *kanonik sunumu* olduğunu söyleyeceğiz.

- 14.13 N_1 'in kanonik sunumunun önemli bir özelliği, Ba ve Ht 'nin bütün elemanlarının N_1 'in alt-Sayıları olması,

dolayısıyla maddesi N_1 'in maddesinden daha küçük olan Sayılar olmasıdır. Her Sayı, o Sayının maddesinden daha küçük maddelerden alınan Sayılardan hareketle temsil edilebilir.

Kanonik sunum, Sayının gerçekleştirdiği kesmeden daha kısıtlı kesmeler aracılığıyla Sayının aşağıdan ve yukarıdan çerçevelemesidir.

Her Sayı, alt-Sayılar kümelerinde bir kesimdir, her Sayı kendisine tabi ve içkin olan iki Sayı serisinin limitinde faaliyet gösterir.

Böylelikle Sayı kavramının yapılaşdırılması tamamlanır. Bir Sayının doğal çokluklarda kesme olarak tespit edilebilir olmasının yanı sıra bu kesme, aynı türden iki kesme serisi arasında bir kesim noktası olarak sunulmaya olanak verir. Bir Sayı tamamen alt-Sayılarının eklem yerinden hareketle düşünülebilir. Sayı basit bir kendilik olmanın ötesinde ayrışım teoremleriyle ilgilidir: alt-yapılarının eklemleme noktası olarak düşünce için yeri tespit edilebilir bir yapı.

Bir Sayı, içkin sayısal belirlenimlerini bir-sonuç olarak gösterir.

15. Kesim: Temel teorem

15.1 Sayılar kalabalığına dalalım.

İlk yorum, tabir caizse Sayıların sayısı hakkında. Bu sayı bir Sayı değildir, hatta tutarlı bir çokluk bile değildir. Sayılar sayısızdır/sayılamazdır.

Gerçekten de bir Sayı bir ordinalle o ordinalin bir parçasından oluşan bir çift olduğu için, en az farklı ordinal sayısı kadar Sayı olmasının dışında, *çok daha fazlası da* vardır; fakat bu “daha fazlası” anlamın sınırlarının ötesine geçer. Her ordinal için o ordinalin farklı parçaları kadar farklı Sayımız olacaktır: W Sayılar için maddeyi sabitleyen bir ordinalse bu maddede sayısal kesmeyle fiilen çekip alınabilecek $p(W)$ (W 'nin parçalarının kümesi) biçim olacaktır.

Fakat ordinallerin bir küme oluşturmadığını biliyoruz. “Bütün” ordinaller küme teorisi anlamında bir derlemede bir olarak sayılamazlar. Başka bir deyişle, ordinaller tutarsız bir çokluk oluşturur. Keza bunun sonucunda Sayılar da.

Fakat ayrıca herhangi bir çokluk verildiğinde bu çokluğun parçalarının kümesinin miktarını tam olarak *bilmeyiz*. Elbette her koşulda ilk baştaki kümenin miktarından daha büyük olduğunu biliriz (Cantor'un teoremi): daima $p(W) > W$ olacaktır. Fakat “ne kadar”

daha fazladır? Bu fazlalığın küme teorisinin temel aksiyomlarından hareketle karar verilemez olduğu ispatlanmıştı (Gödel ve Cohen'in teoremleri). Bununla birlikte $p(W)$ 'nin W 'den "son derece" büyük olduğunu ileri sürmek söz konusu aksiyomlara uygundur. Aynı zamanda "minimal" düzeyde daha büyük olduğunu ileri sürmek de uygundur.⁷

Son olarak her ordinal için, maddesi bu ordinal olan *mümkün Sayılar*, ordinalin kendisindeki elemanlardan her koşulda daha fazla olacaktır. Mevcut koşullarda bu "fazla"nın sadece *değerine* dair karar verebiliriz. Yani Sayıların sayısı bir tutarsızlıklar tutarsızlığıdır.

Aslında bu en basit şekilde şöyle söylenebilir: *Sayı, Varlıkla eş-kaplamalıdır*. Sayı da tıpkı varlık olarak varlığın genel biçimi olan saf çokluk gibi tutarsızdır, her yere saçılır ve çoğalır.

15.2 Sayıların böyle tutarsız bir kalabalığı, diğerlerinin "ortasından" alınan kesin bir Sayının *tespit* edilmesiyle il-

7 Sonsuz bir kümenin parçalarından oluşan kümenin kardinalliği meselesi, Cantor'dan bu yana küme teorisinde merkezî bir konumdadır. Bu kardinalliğin başlangıçtaki kümenin kardinalliğinden daha büyük olan *en küçük* kardinal –söz konusu kümenin niceliğini ölçenin kardinalinin ardılı olan kardinal– olduğunu söyleyen "minimal" hipotez, ünlü "süreklilik hipotezi"dir (İngilizce literatürde CH olarak kısaltılır).

P. J. Cohen'in çalışmalarından bu yana süreklilik hipotezinin, teorisinin klasik aksiyomları temelinde karar verilemez olduğu biliniyor. Bir çelişkiye yol açmadan bu hipotez ne kabul edilebilir ne reddedilebilir.

Bu mesele üzerinde özellikle anlaşılır bir metin olan K. Gödel'in "Cantor'un süreklilik problemi nedir?" adlı metnine başvurulabilir. İngilizce metin ilk yayın tarihi olan 1947'den sonra sık sık tekrar yayımlanmıştır. Örneğin, P. Benacerraf ve H. Putman (ed.), *Philosophy of mathematics*, Cambridge University Press, 2. baskı, 1983, s. 470-486.

gili güçlükleri öngörmemizi sağlar. Her Sayı sağından (kendisinden daha büyük Sayılar) ve solundan (daha küçük Sayılar) baskı yapan kalabalık içine saplanmış-
tır. Hiçbir Sayı net bir şekilde bir başkasının ardından gelmez. Sayısal alanın her mikro bölgesi, Sayıların sayısız bir kalabalığıyla istila edilmiştir. Sayısal topoloji bilhassa *yoğundur*. Sorun da bundan kaynaklanır: Sayı kümeleriyle ilişkili olarak *bir Sayıyı* tespit etmek mümkün müdür? Yoksa Sayı dizileri, sonsuz Sayı kümeleri düşünüldüğü anda hiçbir belirli Sayının bu dizilerden tek anlamlı bir şekilde çekip alınamayacağı bir durumda mıyızdır? Sayıların sayısız/sayılamaz kalabalığı bizi zorunlu olarak “her gerçekliğin çözülüp eridiği o belirsiz dalgalara”⁸ mı götürür?

Sayı-ötesi tutarsızlık böylelikle *kesimi* düşünmeye sevk eder. Hiçbir şeyin artık sayamadığı kadar yoğun bir dokuyu *bir noktada* kesmek mümkün müdür? Kesim aracılığıyla *tekil* bir Sayı belirlenebilir mi?

- 15.3 Bu sorun hiçbir şekilde ne akademiktir ne de Sayı düşüncesine mahsustur. Her gün bize “modern toplumlarımızın karmaşıklığının” bunlarda herhangi bir kesim gerçekleştirmemize mani olduğu söylenir. Çağdaş muhafazakârlık artık kurulu düzenin kutsallığını değil, yoğunluğunu bir bahane olarak öne sürer. Her türlü yerel kesim gerçekte “toplumsal dokunun yırtılması”-dır, der. Doğal yasaları (pazar, iştah, tahakküm) kendi haline bırakın, çünkü bunları *bir noktada* kesmek imkânsızdır. Her nokta, bir kesimin netliğini destekleyemeyecek kadar başka noktalara bağımlıdır.

8 Mallarmé, *Un coup de dés jamais n'abolira le hasard*,—çn

Sayıların aşırı yoğun örgüsünde kesim üzerine düşünmek bu argümanların yanıltıcı olduğu sonucuna varmamızı sağlayacak. Her nokta, yoğun Sayı kümelelerini *ayırır*, her Sayı bir kesimin yeridir ve diğer taraftan her kesim sadece ve sadece tek bir Sayıyı tayin eder. “Belirsiz dalgalar” değil, “bir burç”.

- 15.4 Bu sorunun aynı zamanda karmaşık bir felsefi kökeni vardır: *sürekli büyüklükle ayrık büyüklük* arasındaki diyalektik. Sürekliliğin varlığı, ayırt edilebilir noktalardan değil, daha ziyade birbirine dolanık “komşuluklardan” oluşacak şekilde sıkı kaynaşmasında alınırsa ardışık işaretlerini sayan ayrık nicelikten ayrışık olarak düşünülmelidir. Geometri ile aritmetik zıtlığını kapsayan ve temellendiren bu zıtlık, Hegel dahil nice liğin filozofları için gizemli gerçek konumunda kalmıştır. Kant’ta da sonuçta duyusallığın biçimlerinin ikililiğine dayanak olur: Uzam, sürekliliğin aşkınsal figürüken sayıya kaynak olan zaman, ayrık ardışıklığın figürüdür.

Modern düşüncedeki yazgısı devasa olan⁹ olağanüstü derin kesim kavramı, ayrık/sürekli çiftini niceliksel alanın kurucu çelişkisi olarak gören diyalektik şemayı yerinden eder ve tekrar temellendirir. Bu kavram sürekliliğin dokusunda veya sonsuzca küçük komşu-

9 Kesim kavramı ve noktasal müdahale ile durumların sürekliliği arasındaki ilişkiyi tanımlama tarzı bütün hakikat prosedürlerini kateder. Kırılma siyaseti veya devrimci siyasette, sanatsal yenilik veya modernite temasında, bilimsel krizler ve yeniden tesis temasında veya aşksal ayrılık figüründe ortaya çıktığı tespit edilebilir. Her sadakat aynı zamanda bir kesim sürecidir.

luklardan oluşan yoğun örgüde bir tekillik, dolayısıyla ayırt edilebilir olana bir dayanak meydana getirir. Düşüncenin olağan sırasını tersine çevirerek süreklilikteki bir tür kesintinin bir tür ayrıklığı tayin ettiğini gösterir. Sürekliliğin noktalardan oluştuğunu ileri sürmek yerine süreklilikteki noktaları belirler ve hatta süreklilikte bir kesimden hareketle noktasallığı *tanımlar*. Kesim kavramı, *bileşim* sorunsalı yerine *bütünleme* sorunsalını getirir. Bir nokta, önceden verili olan bir süreklilikte bir birleşme noktasını veya algılanabilir olmayan bir boşluğu “doldurur”.

15.5 Kesim kavramı irrasyonel sayıları tanımlamak amacıyla Dedekind¹⁰ tarafından icat edilmişti.

Dedekind rasyonel sayılardan hareket eder. Pozitif bir rasyonel sayının, p ve q doğal tam sayılar olmak üzere, $\frac{p}{q}$ biçiminde olduğunu biliyoruz. Rasyonel sayılar sıra düzenlerinin *yoğun* olması nedeniyle sürekliliğe dair bize bir ilk imge sunarlar. Yoğun bir sıra düzeni, sıralı iki eleman arasına daima üçüncü bir eleman ve bu özelliğin yinelenmesiyle sonsuz eleman gelebilecek şekilde bir düzendir. 0 rasyonel sayısını (0'ın rasyonel olmasının nedeni, aynı zamanda $\frac{0}{p}$ kesri olmasıdır) ve $\frac{1}{2}$ rasyonel sayısını alırsanız $0 < \frac{1}{2}$ şeklindedir. Fakat $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots$ vs. sayıları, yani $\frac{1}{n}$ biçimindeki sonsuz sayı 0 ile $\frac{1}{2}$ arasına gelecektir.

10 Dedekind'in kesim fikri üzerine temel metni 1872 tarihlidir; “Süreklilik ve irrasyonel Sayılar”. *Les Nombres, que sont-ils et à quoi servent-ils?* adlı kitapta Fransızcaya tercüme edilmiştir, a.g.e.

Yoğunluk doğrudan niceliksel bir özelliği ifade etmez: Rasyonel sayıların sonsuzluğu sayılabilir türdendir ve doğal tam sayıların sonsuzundan daha büyük değildir: halbuki tam sayılar, sadece sonlu ordinarler olarak hiçbir yoğun sıra düzeni sunmazlar: n ile $n+1$ arasında bir doğal tam sayı yoktur. Yoğunluk, sıra düzeninin topolojik bir özelliğidir: Basit “bir adım daha” fikrini, bir terimin tamamen belirlenmiş *takipçisi* fikrini dışlar. Her terimin bir komşular sonsuzluğuna “yapışmasını” sağlayan bir tür genel kaynaşma arz eder. Bir sıra düzeninin yoğunluğu topolojik bir özellikken ardışıklık cebirsel bir özelliktir. Yoğunluk “yarı sürekli”dir, zira bir rasyonele başka rasyonellerle istediğimiz kadar yaklaşabiliriz. İki rasyonel sayı arasında ve daha genel olarak yoğun bir sıra düzenindeki iki terim arasında *başka türden* sayılar veya terimler için yer olmadığını hissederiz, çünkü ne kadar küçük olursa olsun her aralık halihazırda bir rasyoneller sonsuzluğuyla veya yoğun sıralı bir terimler sonsuzluğuyla doludur.

Dedekind tam da rasyonellerin bu yarı sürekliliğinde kesim aracılığıyla rasyonellerin görünüşte tamamlanamaz yoğunluğunu tamamlayacak ek “noktalar” tanımlayacak ve yarı-süreklilikte kesintilerle “hakiki” bir süreklilik elde edecektir.

16. bölümde prosedüre ayrıntılarıyla geri döneceğiz. Şematik olarak söyleyecek olursak: Dedekind R_1 ve R_2 gibi ayrık rasyonel sayılar kümeleri düşünür; R_1 ’in bütün elemanları R_2 ’nin elemanlarından küçüktür, ayrıca R_1 ’in içsel bir maksimum rasyonel sayısı ve R_2 ’nin içsel bir minimum rasyonel sayısı yoktur; bun-

lar biri yukarıya doğru, diğeri aşağıya doğru “açık” iki kümedir. Dedekind böylelikle bir reel sayıyı, R_1 ile R_2 arasındaki bir kesimin yerini işgal ediyor olarak *tespit* eder. Bu reel sayı, R_1 ’in üst limiti ve aynı zamanda R_2 ’nin alt limiti olacaktır. Bu inşada rasyonellerin sıra düzeninin yoğunluğu temel bir rol oynar; bize yoğunluk ile kesimin birbirini dışlamak şöyle dursun, düşüncede eşleştiğini öğretir.

Bununla birlikte söz konusu prosedürün rasyonel sayıların bilindiğini varsayarak reel sayıları *tanımlama*-yı hedeflediğine işaret etmemiz gerekir. Dedekind’in kesimi tamamen bir tamamlama işlemidir: *Hiçbir şeyin*, hiçbir rasyonel sayının olmadığı yerde, “fazladan” olan bir şeyin adı ortaya çıkar. R_1/R_2 kesimiyle tanımlanan reel sayı, sadece rasyonellerin tarafından düşünüldüğünde *yoğunluk içindeki bir boşluğu*, dolayısıyla hiçbir şeyin tanıklık etmediği bir boşluğu tıkar. Kesim bu nedenle ilk yoğunluğu “tamamlayan” yeni bir sayı türünü *temellendirir* ve geriye dönük olarak söz konusu yoğunluğun, içinde delikler bulunmayacak kadar yoğun olmadığına işaret eder.

- 15.6 Sayıların tutarsız alanını “tamamlamayı” veya Sayının görünmez gediklerini adlandıracak, Sayı dışında bir hiper-Sayı temellendirmeyi ummamız mümkün değil. Varlıkla eş-kaplamalı olduğu için (bkz. 15.1) Sayılarımız tamamlanamazdır. *Bütün Sayılar zaten oradadır*. Bu koşullarda bir kesim ne anlama gelebilir?

Bununla birlikte Sayılarda kesime dair çok güçlü bir kavram vardır. Bu kavram, bir Sayının alt-Sayıları arasındaki ayırt edici tekiliği, düşük ve yüksek kümesi ara-

sındaki kesim olarak kimliğinde söz konusu olan (bkz. 14. bölüm) “madde denk alındığında” kavramıdır.

Bu kesim kavramı, noktasal bir kesimin kesinliği ve birliğiyle Sayıların tutarsız kalabalığını eklemleyen ve Sayının ontolojisinin temel teoremi adını hak eden aşağıdaki teoremde sunulmaktadır:

B (aşağı) ve H (yukarı) ile gösterilen ve B kümesinin her Sayısı H kümesinin her sayısından küçük (tabii ki Sayıların sıra düzeninde) olacak şekilde iki Sayı kümesi verildiğinde daima B ile H “arasında” yer alan minimal maddeli tek bir N Sayısı vardır. “Arasında” yer almak, N’nin B’nin her elemanından daha büyük ve H’nin her elemanından daha küçük olduğu anlamına gelir.

N Sayısı elbette B ile H arasında olan tek sayı değildir. Sayısal kalabalık o kadar büyük, yoğunluk o kadar yüksektir ki böyle bir yalnızlığı düşünmek bile mümkün değildir. Fakat bu Sayı *kendi maddesiyle* orada bulunan tek sayıdır. Bütün diğerlerinin maddesi, maddeler ordinaller olduğu için kesin bir anlamda onunkinden daha büyüktür: N’nin ordinal-maddesi “B ile H Sayı kümeleri arasında yer alan bir Sayının maddesi olma” özelliği açısından minimaldir.

Burada minimallik olması bizi şaşırtmayacaktır. Bu, ordinallerin klasik bir terkidir. Şaşırtıcı olan:

- böyle bir Sayının *var olması*;
- bu Sayının *biricik* olmasıdır.

Bu Sayının var olması kesimin ilkesini temellendirir. Eğer iki Sayı kümesi B ve H gibiye (B’nin her Sayısı, H’nin her sayısından küçükse), Sayıların sıra düzeni-

nin devasa yoğunluğuna rağmen B veya H'ye ait olmayıp B ile H “arasında” var olan bir şeyden söz edebiliriz. Dolayısıyla bu sıra düzeninin hiper-yoğun dokusunu *kesmek* mümkündür.

Biriciklik (madde denk kabul edildiğinde, yani minimal maddenin Sayı-kesiminin biricikliği) her şeyin kaynaşma içinde olduğu, yoğun komşuluklar içinde olduğu tam o yerde bir-olarak-sayılmanın sebatını, özdeşleşme ilkesini temellendirir. Bir kesim, *bir* Sayıyı Sayı kümelerinden hareketle tayin eder. Tutarsızlığın sınırlarına kadar zorlandığında bile hiçbir karmaşıklık, en ince sonsuz küçük civarlara kadar götürüldüğünde bile hiçbir yoğunluğun bir noktada kesimi yasaklayamadığını ileri süreceğiz.

15.7 Bu bölümün geri kalanı temel teoremin ispatına vakfedilmiştir; kitabın biraz karışık olan yegâne teoremi.¹¹

Üstelik ispatın bütün ayrıntılarını verme niyetinde değilim. Bununla birlikte Sayı matematiğinin kalbindeyiz ve burada kesimi düşünmek için işe koşulanlar matematiksel ontolojiyi hayli aşan bir kavramsal öneme sahip. Bütün hakikat prosedürleri kesimle ilerler ve burada *her* kesim stratejisinin soyut modeli elimizdedir. Okurdan beklenen entelektüel çabanın onu Spinozacı bir güzelliğe götüreceğine eminim.

11 H. Gonshor'un *An introduction to the theory of surreal numbers*, a.g.e. adlı kanonik kitabında izah, temel teoremin ispatıyla başlar. Hem daha önce dediğim gibi küme teoriselden ziyade yüzü hesaplamaya dönük bir yaklaşım benimsediği hem de varoluş ispatıyla yetinmeyip, kesim olan Sayıyı tam olarak belirlemeyi (daha “konstrüktif” bir ispat olarak adlandırır bunu) hedeflediği için Gonshor'un üslubu bir hayli farklıdır. Bu belirleme kaygısı birçok durumun incelenmesini zorunlu kılar.

15.8 Bir Sayılar kümesinin üst sınırı.

Topolojik türden soruşturmalar içinde olduğumuz için ve özellikle bir Sayılar kümesinden daha büyük (veya daha küçük) sayıları nasıl bulacağımızı kendimize sorduğumuz için en basit kavramla, üst sınır kavramıyla başlayalım: Bir Sayı kümesi verildiğinde, kümenin bütün Sayılarından daha büyük “biricik” bir Sayıdan bahsetmenin anlamı var mıdır?

Sayı kalabalığı dikkate alındığında bir kez daha “madde denk alındığında” kavramından yararlanmalıyız. Şunu ispatlayacağız: Eğer B bir Sayı kümesiye, B kümesinin bütün sayılarından daha büyük minimal maddeli biricik Sayı olan bir N sayısı vardır. N 'yi, B 'nin üst sınırı olarak adlandıracğız. Üst sınırın şaşırtıcı bir özelliğı daha karşımıza çıkacak: Üst sınır *daima* (W, W) şeklinde yazılan bir sayıdır; yani biçimi maddesinin tamamından oluşan bir Sayı.¹²

15.9 B bir Sayı kümesi olsun. Şu şekilde tanımlanmış ordinali ele alalım: “ B kümesinin her N Sayısı için $w_1 \in W$ var olacak şekilde N 'nin ya atığında ya da maddesinin dışında olacak, en küçük W ordinali”.

Böyle bir W ordinali vardır, çünkü B bir kümedir, dolayısıyla da tutarlıdır. W var olmasaydı bu, bütün ordinalerin B 'nin en az bir N Sayısının biçiminde toplanması anlamına gelirdi. Fakat “bütün ordinaler” tutarsız bir çokluktur ve sonuç olarak bu durumda B de tutarsız bir çokluk olacaktı ve dolayısıyla bir küme olarak düşünölemeyecekti.

12 16. bölümde bir B kümesinin (W_1, W_1) şeklinde olan üst sınırının bir ordinal olduğunu göreceğiz. Bu çok çarpıcı bir sonuçtur.

W gibi bir “en küçük”ün var olması, ordinallere mahsus minimallik özelliğinin bir sonucudur.

W belirlendikten sonra (W, W) sayısını düşünelim. Bu sayı, B kümesinin her Sayısından daha büyüktür. Aslına bakılırsa W'nin tanımı gereği, B'nin her N Sayısı için, atığında veya maddesinin dışında olan $w_1 \in W$ vardır. Gelgelelim (W, W) 'nin biçimi W olduğu için her $w_1 \in W$, (W, W) 'nin biçimindedir. B'nin bir N Sayısı ile (W, W) 'nin ayırtacı, zorunlu olarak N'nin atığında veya maddesinin dışında olan en küçük $w_1 \in W$ 'dir. Bu w_1 , (W, W) 'nin biçiminde olduğu için, atık (veya madde dışı)/biçim ilişkisi (W, W) 'nin N'den büyük olmasını zorunlu kılar.

B'nin her Sayısından daha büyük bir Sayı, yani (W, W) var olduğu için, ordinallerin minimalliği özelliği nedeniyle en azından minimal maddeli bir ordinal vardır.

(W_1, X) “B'nin her Sayısından daha büyük olan bir Sayının maddesi olma” özelliği için minimal maddeli bir Sayı olsun. Bu Sayının biçiminin aslında W_1 'e eşit olduğunu ileri sürüyorum.

X, W_1 'den farklıysa, dolayısıyla Sayının biçimi bütün maddesi değilse nedeni atıkta olan en az bir $w_2 \in W_1$ sayısı olduğundandır. O halde w_2 'de bölümlenmeyle elde edilen (W_1, X) alt-Sayısını, yani $(w_2, X/w_2)$ alt-Sayısını düşünelim. w_2 , (W_1, X) 'in atığında olduğu için, $(w_2, X/w_2)$ alt-Sayısı (W_1, X) 'in yüksek kümesindedir (bkz. 14.7). Dolayısıyla (W_1, X) 'ten daha büyüktür ve *a fortiori* B'nin her sayısından daha büyüktür, çünkü halihazırda (W_1, X) için durum böyledir.

Fakat bu imkânsızdır, zira $(w_2, X/w_2)$ Sayısının maddesi, (W_1, X) sayısının maddesinden küçüktür. Halbuki (W_1, X) 'in B'nin her Sayısından büyük sayılar için minimal maddeye sahip olduğunu varsaymıştık.

Başlangıçtaki hipotezimiz reddedilmelidir: (W_1, X) 'te atıkta olan hiçbir eleman olamaz, bu da biçimin bütün maddeyi işgal ettiği ve Sayının (W_1, W_1) şeklinde yazılması gerektiği anlamına gelir.

Dolayısıyla B kümesinin bütün Sayılarından büyük, minimal maddeye sahip *tek bir Sayı* vardır: Bu, W_1 'in söz konusu minimal madde olduğu (W_1, W_1) sayısıdır.

Öyleyse bir Sayı kümesinin üst sınırından bahsetme hakkımız vardır. Halihazırda biriciklik teması, bir bariyer veya durak olarak Sayıların hiper-yoğun kalabalığına kaydolur.

15.10 Bir Sayı kümesinin alt sınırı.

Üst sınır için kullandığımıza benzer bir akıl yürütme, bir H Sayı kümesinden küçük minimal maddeli biricik Sayıyı tanımlamaya olanak verir. Bu, H kümesinin alt sınırı olacaktır. Bu kez söz konusu Sayının $(W_2, 0)$ şeklinde yazıldığını göreceğiz: Bu Sayının biçimi boşluktur, sayısal kesme W_2 maddesinden hiçbir şeyi çekip almaz.¹³

H bir Sayı kümesi ve W şu şekilde tanımlanmış ordinal olsun: “H kümesinin *her N Sayısı için*, N'nin ya biçiminde ya da maddesinin dışında olacak $w_1 \in W$ var olacak şekilde en küçük W ordinali”. H bir küme ol-

13 Bir H kümesinin alt sınırı, aslında bir ordinalin negatifidir, yani bir $-(W)$ Sayısıdır. Bkz. 16. bölüm.

duğu için ve minimallik ilkesi gereği (bkz. yukarıda) böyle bir W ordinali zorunlu olarak vardır.

Maddesi W ve biçimi boşluk olan $(W,0)$ Sayısı, H 'nin her Sayısından daha küçüktür. Aslına bakılırsa her $w_1 \in W$ ordinali $(W,0)$ 'ın atığındadır. H 'nin her N Sayısı için, W 'nin tanımı gereği, ya N 'nin biçiminde ya da N 'nin maddesinin dışında olan $w_1 \in W$ vardır. En küçük olan bu w_1 , N ile $(W,0)$ 'ın ayırtacıdır ve konumu $(W,0) < N$ olmasını zorunlu kılar.

Dolayısıyla H 'nin her Sayısından daha küçük bir Sayı vardır ve minimallik gereği minimal maddeli en az bir tane böyle sayı vardır: Bunu (W_2, X) ile gösterelim.

X 'in zorunlu olarak boş küme olduğu kolaylıkla gösterilebilir. Öyle olmasaydı bu, (W_2, X) 'in biçiminde olan bir $w_3 \in W_2$ var olduğu anlamına gelirdi. Fakat bu durumda w_3 'te bölümlenmeyle elde edilen (W_2, X) 'in alt-Sayısı, yani $(w_3, X/w_3)$, (W_2, X) 'in düşük kümesindedir (bkz. 14.7). Dolayısıyla bu, (W_2, X) 'in maddesinden daha küçük bir maddeye sahipken (W_2, X) 'ten ve dolayısıyla H 'nin her Sayısından daha küçüktür; bu ise söz konusu konum için W_2 'nin minimalliği bakımından imkânsızdır.

Dolayısıyla H kümesinin bütün Sayılarından küçük, minimal maddeye sahip *biricik bir Sayı* vardır. Bu, W_2 'nin söz konusu minimal madde olduğu $(W_2, 0)$ sayısıdır. $(W_2, 0)$ Sayısı, H kümesinin (madde denk olduğunda) alt sınırıdır.

15.11 Temel teorem, birinci kısım. Varlık.

“Varlık” [existence] burada şu anlama gelir: B ile H gibi iki Sayı kümesi arasında yer alan en az bir Sayı

vardır; notasyonu biraz suiistimal ederek $B < N < H$ şeklinde yazabiliriz.

B'nin her Sayısı, H'nin her Sayısından daha küçük olacak şekilde B ve H iki Sayı kümesi olsun. Tekniğimiz B ile H arasında, ele alınan her bir W ordinali dahil hiçbir şeyin N Sayısını bir B Sayısından küçük veya bir H Sayısından büyük olmaya zorlayamayacağından emin olacağımız şekilde adım adım, yani O'dan itibaren ordinal ordinal her bir adımda "askıya alınmış" bir N Sayısı inşa etmekten oluşmaktadır. Ayrıca, N prosedürünün O'dan W'ye giden bölümlenmesinin B ve H'de alınan farklı alt-Sayılarla kurduğu ilişkiye göre bir W ordinalini, inşa edilmekte olan N Sayısının biçimine veya atığına yerleştirmeyi "seçerek", N'yi maddesi artan alt-Sayılarından inşa edeceğimizi de söyleyebiliriz.

Temeldeki fikir, bir kesim inşasının, söz konusu inşanın güzergâhına dahil olan alt-yapıların yerel bir egemenliğini zorunlu kıldığıdır. En azından kesim etkisini (temellendirici kesintileri) hedeflediği sürece bu, pratiğin genel bir yasasıdır.

Bu tekniğin, kesimle bir tür *nötrleştirme prosedürü* arasındaki bağı açığa çıkarmak gibi çok büyük bir önemi vardır. N'nin, B'nin Sayılarıyla H'nin Sayıları arasına girivermesi için N'nin her noktasında sıralılık ilkesinin B'nin Sayılarıyla H'nin Sayıları arasındaki ayrımı "nötrleştirdiği"ne dikkat edeceğiz. Bütün güçlük, ne zaman duracağımızı veya kapanışını askıya alırken katetmiş olacağımız N Sayısının maddesini ne zaman *sabitleyeceğimizi* bilmektir.

Düşüncenin her alanında yoğun sıralı bir dokuda kesin bir kesim gerçekleştirmek, adım adım bir dikkat-

li araya sokma taktiği hesaplamak, daha sonra ara terimi değiştirilemez şekilde sabitleyen bir durma noktasını göze almaktır. Böylelikle kesim, aralığın nötrlüğü ile kesintinin atıklığını birleştirir. Düşüncenin büyük strateji uzmanları bu yüzden mutlaka hem bir gediği nokta nokta açan ve genişleten şeyin sabrında hem de geri dönüşsüz veya fesih imkânı olmadan onun varlığını mühürleyen ve adlandıran şeyin ivenessinde ustalaşmak zorundadır.

15.12 0 ordinalinden başlayacağız ve her defasında bir $f(W)$ değeri atayarak ordinaleri katedeceğiz: Bu değerler F (biçim için), D (atık için) veya M (madde için) olabilir. M değeri sadece bir kez, son olarak verilebilir, çünkü inşa etmek istediğimiz N Sayısının sadece bir maddesi vardır... Bir W ordinali için $f(W) = F$ ise W 'yi inşa edilecek N Sayısının biçimine koyacağız, $f(W) = D$ ise W 'yi atığa koyacağız. M değeri atanana kadar N 'nin alt-Sayıları "inşa halinde"dir. Bu prosedür her W ordinali için, prosedür devam ettikçe N/W alt-Sayısı geriye dönük olarak asla N 'yi H 'nin bir Sayısından büyük veya B 'nin bir Sayısından küçük olmaya zorlamıyor görünecek şekilde bir konum değeri sabitlemeye denktir.

Bir kesimin inşasının stratejik sabrı, *global* bir kesim şansından ödün vermeden araya *yerel* ek değerler sokmaktan oluşur. Nokta nokta ilerlese de değiştirilemez ve genel bir durak olduğuna geriye dönük olarak karar verilen bir çalışmadır bu.

B 'nin ve H 'nin Sayılarını gerekirse indislerle, N_b ve N_h şeklinde yazacağız. N_i ise, B ile H arasında inşa etmek istediğimiz ara Sayıya işaret edecek.

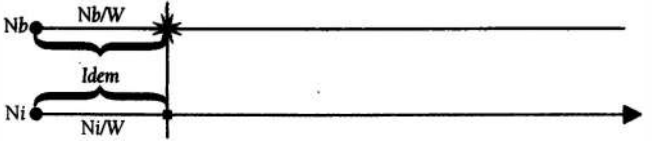
Belirli bir Nb Sayısı (ve Nh için de aynısı söz konusu) için bir W ordinalinden daha küçük ordinalere f tarafından atanan değerler (yani inşa halindeki Ni'de bu ordinalerin aldığı F veya D türü değerler), Nb'de (ve Nh'de) ordinaleri konumlandıran değerlerse W'nin Ni ile Nb'yi (ve Nh) özdeşleştirdiğini söyleyebiliriz. W'nin Nb (ve Nh) ile Ni'yi özdeşleştirmesi, her koşulda W'den daha küçük hiçbir ordinalin Nb (ve Nh) ile Ni'yi ayırmadığı anlamına gelir. Özel olarak Nb veya Nh ile inşa halindeki Ni bölümünün (0'dan W'ye kadar giden bölüm) ayırtacı W'den küçük ordinalerde yer alamaz. Bu da –ayrıca bu W ordinali noktasında özdeşlik bağıntısının en kolay işlenir biçimidir– W'ye kadar Ni/W “alt-Sayısı”nın Nb/W (ve Nh/W) alt-Sayısına özdeş olduğu anlamına gelir.

W'nin Ni ile Nb'yi özdeşleştirmesi olgusunu $\text{Id.}(W, Nb)$ ile göstereceğiz. Aynı şey Nh için de geçerlidir. $\text{Id.}(W, Nb)$ 'nin $Ni/W = Nb/W$ anlamına geldiğini unutmayalım.

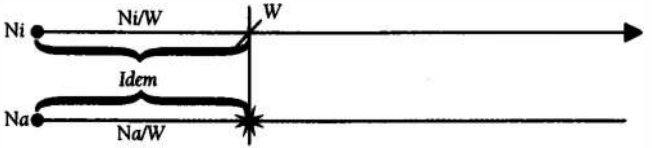
Buradaki stratejik fikir, Nb (ve Nh) ile inşa halindeki Ni'yi özdeşleştiren bir ordinaler serisinin ne zaman “sonu”na gelsek $f(W)$ için bir değer tercihinin B ile N arasında olan ve tamamlandığı varsayılan bir Ni konumu şansımızdan ödün vermemesini sağlayarak sıralılık için “nötrleştirilmiş” bir Ni inşa etmektir. Sadece hiçbir ordinalin Ni'yi bir B Sayısından küçük veya bir H Sayısından büyük olmaya zorlayacak olumsuz ayırtaç konumuna gelmemesine dikkat etmek gerekecek. Kesim ihtimamı burada arada olma konumuna dair şansını kaybetme riskine girmemekten ibarettir. Bir kesim inşasının “adım adım” fazının ilkesi, şansını muhafaza etmektir.

15.13 Aşağıda, 0'dan itibaren ordinaler için Ni inşasının kurallarını veriyoruz:

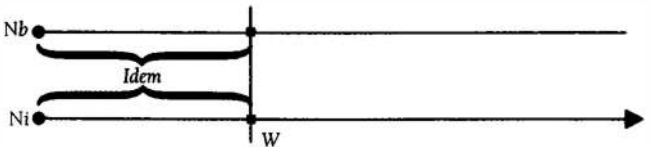
1. *kural*: $\text{Id.}(w, Nb)$ ve W , Nb 'nin maddesiye $f(W) = F$. Ni/W 'ye özdeş bir Nb/W 'nin sonuna gelindiğinde W , Nb 'nin maddesi olduğu zaman W ordinalini Ni 'nin biçimine koyuyoruz. Yani, biçime ait olmayı siyah bir kareyle gösterirsek:



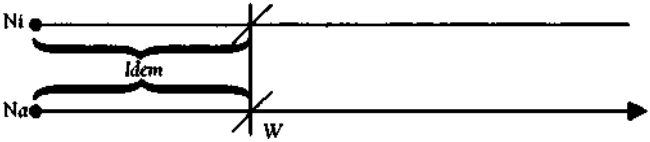
2. *kural*: $\text{Id.}(W, Nh)$ ve W , Nh 'nin maddesiye $f(W) = D$. Atığa ait olmayı / işaretiyle gösterirsek çizim açıktır:



3. *kural*: 1. ve 2. kurallar belirli bir W için geçerli değilse, ama $\text{Id.}(W, Nb)$ olacak şekilde bir Nb varsa W , Nb 'nin biçiminde olmak üzere $f(W) = F$. 1. ve 2. durumlar geçerli değilse Ni/W 'ye özdeş bir Nb/W 'nin sonuna gelindiğinde W , Nb 'nin biçiminde olursa W ordinalini Ni 'nin biçimine koyuyoruz.



4. kural: 1. ve 2. kurallar geçerli değilse ve W , Nh 'nin atığında olmak üzere $Id.(W, Nh)$ olacak şekilde bir Nh olduğunda $f(W) = D$:



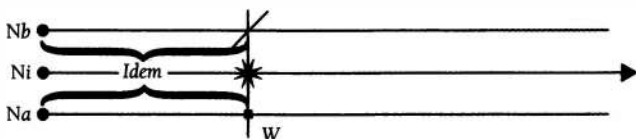
5. kural: İlk dört kuraldan hiçbirisi geçerli değilse bunun nedeni ele alınan W için, $Id.(W, Nb)$ olacak şekilde hiçbir Nb 'nin, W 'ye madde olarak ya da biçimde sahip olmamasıdır ve $Id.(W, Nh)$ olacak şekilde hiçbir Nh 'nin, W 'ye madde olarak ya da atığında sahip olmamasıdır. Bu koşullarda W noktasında $Id.(W, Nb)$ olacak şekilde bir Nb varsa W , Nb 'nin atığındadır ve $Id.(W, Nb)$ ise W , Nh 'nin biçimindedir. Bu durumda $f(W) = M$ olduğunu söyleriz ve bu da Ni 'nin inşasını tamamlar.

Bu kuralı gerekçelendirmek için şuna işaret edebiliriz: W 'nin böyle konumlandırılmadığı –yani W 'nin atıkta olduğu (veya Nh için biçimde olduğu)– her Nb (ve her Nh), W bunları Ni 'yle özdeşleştirmeyeceği şekildeyse, bunun nedeni söz konusu Nb 'ler (ve Nh 'ler) için $Nb/W \neq Ni/W$ olmasıdır (benzer şekilde $Nh/W \neq Ni/W$). Başka bir deyişle bu Nb 'ler ve Nh 'ler zaten, W ordinalinden önce Ni 'den ayırt edilmiştir. Sadece W 'nin atıkta (ve benzer şekilde biçimde) olduğu Nb 'ler ve Nh 'ler ayırt edilmemiştir.

Bu açıklama 5. kuralın, Ni sürecinin kapanma kararını haklı olarak salık verdiğini söylemeye izin verir. Şöyle

öne sürebiliriz: $f(W) = M$, dolayısıyla W 'nin N_i 'nin ordinal-maddesi olduğu, N_i 'nin inşası sürecinin durduğu yer olduğu tespit edilir.

W, Ni'nin maddesiye W'de *kapandığı varsayılan* Ni için madde dışında konumlanmıştır. W, Ni'yi sadece W'nin atıkta olduğu Nb'den veya W'nin biçimde olduğu Nh'den ayırt eder. Ni'nin konumu, B ile H “arasında” kalacaktır, zira sıralılık bağıntısının şeması tam da $d < hM < F$ şeklindedir. Su çizim elde edilir:



Kapanış tamamen mümkündür, çünkü W ordinalinin ötesinde *her* Nb ve Nh, Ni'den ayrılır (W'den önce 1.-4. kurallarla, W *noktasında* 5. kuralla); kurallarımız söz konusu ayırım daima Nb < Ni < Nh yönünde yapılacaktır. şekilde ayarlanmıştır.

Bu ayarlama yine de incelenmeyi gerektirir.

15.14 Kurallarımızın aralarında çelişkili olmadığını doğrulamak temel bir önemdedir.

Örneğin 1. ve 2. kurallarımızı ele alalım. Şanssızlık sonucu *aynı anda* hem $Id.(W,Nb)$ hem de $Id.(W,Nh)$ ortaya çıkarsa ve W hem Nb 'nin hem de Nh 'nin mad-desiyse W 'yi Ni 'nin biçimine ve atığına koymamız gerekir...

Fakat böyle bir durum ortaya çıkamaz. Çünkü, eğer W hem Nb 'nin hem de Nh 'nin maddesiye B 'nin her Sayısı, H 'nin her Sayısından küçük olduğu için $Nb < Nh$

olur. Aynı W maddesine sahip oldukları için ayırtaçları W 'den zorunlu olarak küçüktür ve bu da Nb ve Nh 'de aynı konuma sahip olmayan en az bir $w_1 \in W$ ordinali olduğu anlamına gelir. Dolayısıyla Nb/W ve Nh/W alt-Sayılarının özdeş olması mümkün değildir. Bu ise, aynı anda hem $Id.(W, Nb)$ hem de $Id.(W, Bh)$ olursa Ni/W 'ye ortak özdeşliklerini zorunlu kılar. Dolayısıyla 1. ve 2. kural uyumludur.

Fakat 3. ve 4. kuralları ele alalım. Bir şanssızlık eseri 1. ve 2. kuralın geçerli olmadığı bir W varsa ve bir yandan $Id.(W, Nb)$ ve $Id.(W, Nh)$ olan Nb ve Nh var ve öte yandan W , Nb 'nin biçiminde ve W , Nh 'nin atığındaysa W 'yi Ni 'nin hem biçimine hem de atığına koymak gerekir.

Elbette böyle bir şanssızlığın vuku bulması imkânsızdır. Çünkü W , Nh 'nin atığında ve Nb 'nin biçimindeyse Nb ile Nh 'yi ayırır. Fakat, onların ayırtacı olmaz, aksi takdirde konumu gereği $Nh < Nb$ olurdu, ama $B < H$ olması buna olanak vermez. Dolayısıyla ayırtaç, W 'den *daha küçüktür* ve biraz önce olduğu gibi $Nb/W = Nh/W$ olması imkânsızdır; halbuki Ni/W 'ye varsayılan ortak eşitlikleri bunu dayatıyordu.

15.15 Şimdi bu kurallarla Ni 'nin B 'nin *bütün* Sayıları ile H 'nin *bütün* sayıları arasına, yani bütün Nb 'ler ile bütün Nh 'ler arasına girme şansımızı koruyup korumadığımızı göreceğiz.

1. kuralı uyguladığımızda W ordinaline F değerini veririz. Bu kuşkusuz Ni 'yi B 'nin bir sayısından küçük yapamaz zira eğer W , Ni ile bir Nb 'nin ayırtacıysa Ni 'nin biçiminde olduğu için her zaman $Nb < Ni$ olacaktır.

Fakat W'yi biçimine koyduğumuz için Ni'nin H'nin bir Sayısından daha büyük hale gelmesi riskine girmiş olmaz mıyız? Bunun için W'nin Ni ile bir Nh'nin ayırtacı olması gerekir. Fakat bu durumda nihayetinde W'nin maddesi olduğu Nb (zira 1. kuralı uyguluyoruz) ile Nh'nin ayırtacı da olacaktır. Halbuki Nb < Nh olduğunu biliyoruz. Bunların ayırtacı eğer Nb'nin maddesiye Nh'nin biçiminde olması gerekir. W, Ni ile Nh'nin ayırtacı olduğu için W'nin bu konumu Nh < Ni olmasını engeller.

Dolayısıyla 1. kuralı uygulayarak W'nin inşa halindeki Ni sayısında böylelikle sabitlenmiş konumunun *can sıkıcı* bir Ni < Nb veya *vahim* bir Nh < Ni gibi bir durumun ortaya çıkmasına izin vermeyeceğinden eminizdir. Ni, B ile H “arasında” kalır.

Diğer kuralların incelenmesi de aynı sonuçlara götürür. Mesela 5. kuralı inceleyelim (2., 3. ve 4. kurallar için yöntem 1. kuraldakiyle aynıdır. Notun¹⁴ ve özellikle aşağıdaki şemanın yardımıyla okur bunlarla alıştırmalar yapabilir).

5. kural, ilk 4 kural geçerli olmadığında sahneye çıkar. Ele alınan W, Nb'nin maddesinde (1. kural), Nh'nin maddesinde (2. kural), Nb'nin biçiminde (3. kural) veya Nh'nin atığında (4. kural) konumlandırıl-

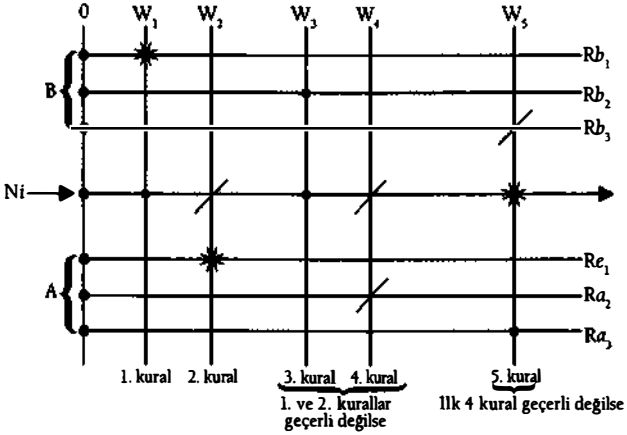
14 2. kural için akıl yürütme tarzı, 1. kuralı doğrulayan akıl yürütme tarzının tam simetrigidir. 3. kuralı ele alalım: Id.(W,Nb) elde ederiz ve W, Nb'nin biçimindedir. W'yi Ni'nin biçimine koyuyorum. Ni'nin böylelikle H'nin bir Sayısından daha büyük hale gelmesi riski ortaya çıkmıyor mu? Bu varsayılan Sayı Nh olsun. W, Ni ile Nh'nin ayırtacı olmalı; bu da Nh ile Nb'nin de ayırtacı olduğu anlamına gelir. W, Nb'nin biçiminde olduğu için Nh < Nb olur ve bu mümkün değildir.

4. kural için de aynı yaklaşım kullanılır.

dığı koşullarda hiçbir Nb (veya Nh) ile Ni arasında biz özdeşleştirme gerçekleştirmez. Dolayısıyla Id.(W,Nb) veya Id.(W,Nh) olursa nedeni, W'nin Nb'nin atığında ve/veya Nh'nin biçiminde olmasıdır. Bu iki hipotez bu kez uyumludur: Söz konusu özdeşleşmeler gerçekleşebilir ve W aynı anda hem Nb'nin atığında hem de Nh'nin biçiminde olabilir. Böylelikle 5. kural, W'yi Ni ara Sayısının maddesi olarak belirleyen $f(W) = M$ kapanış jestini dayatır. Böylelikle kapanan Ni'de W madde dışında konumlanır. Bu seçim Ni'nin $D < hM$ ilişkisine göre bir Nh'den düşük olmasına neden olabilir mi? Hayır, çünkü eğer W, Nh'nin atığında olmak üzere bu Nh ile Ni'yi ayırıyor olsaydı 4. kural geçerli olurdu ve bu da 5. kuralın uygulanmasını önlerdi. Benzer şekilde $hM < F$ ilişkisine göre $Ni < Nb'$ 'de olamaz, zira W ayırtacının bir Nb'deki konumu W için 5. kuralın değil 3. kuralın uygulanmasını gerektirir. Gerektiğinde uygulanan 5. kural sadece $Ni < Nb'$ 'yi gerektirir. Ayrıca $Nh < Ni$ sonucunu getiremeyeceği için Ni prosedürünü B ile H aralığında W noktasında bırakır.

Böylelikle her W ordinal noktasında kurallarımızın uygulanması B ile H'nin ara konumunda Ni/W alt-Sayıları biçiminde Ni'yi “yerel olarak” konumlandırır. Adım adım çalışmamız Ni, Nh'yi geçmeden veya Nb tarafından geçilmeden devam eder. Bütün inşa boyunca şansımızı koruyoruz. Aşağıdaki çizim kabaca Ni'nin nasıl ilerlediğini göstermektedir. Çizimin üst kısmında B'nin birkaç Nb Sayısı, altında H'nin birkaç Nh Sayısı ve ortada da Ni süreci gösteriliyor. W_1 'den W_5 'e kadar ordinaller sırayla beş kuralın uygulandığı durumları gösteriyor. Kareler, yıldızlar ve çapraz çizgiler

biçim, madde ve atığı gösteriyor. Bir nokta bir Nb'de veya Nh'de işaretlendiğinde bunun nedeninin söz konusu ordinal *öncesinde* Nb'nin (veya Nh) Ni'yle özdeş olması (ordinal noktasında özdeşlik bağıntısı) olduğu hatırlanacaktır.



Bu yaklaşımın tüm inceliği, Ni'nin W noktasındaki değerini (özel olarak F değerini vererek) sadece H tarafında herhangi bir etkiye yol açmayacağı garanti olduğunda artırarak riskleri azaltmaktır; ve bu değer (D değeri), sadece B tarafındaki her türlü etki ortadan kalktığında küçültmektir. Böylelikle Ni, daima sıralılık etkilerinin maksimal nötrleştirilmesinde B ile H arasına girer.

Atık (Nb) ile biçim (Nh) arasında yer alan bir W için kapanma zamanı geldiğinde (5. kural), bu olanağın *yel olarak* yasaklanmasına karşı korunduğu için B ile H arasında *global olarak* konumlanmış bir Sayının elde edilmesiyle geriye dönük olarak taktığı mühürleriz.

15.16 *Temel teorem, ikinci kısım: biriciklik.*

$B < H$ olacak şekilde (notasyonu suistimal ederek) iki Sayı kümesi B ile H arasında her koşulda en azından bir Sayının var olduğunu ortaya koymaya izin veren yerel nötrleştirici sabır ve global kapama kararından oluşan stratejiyi anlattık. Ordinallerin minimallığı ilkesi uyarınca illa böyle bir minimal maddeli Sayı vardır: “ B ile H arasında konumlanmış bir Sayının maddesi olma” özelliğini ve bu özellik için minimal ordinali göz önünde tutacağız.

Geriye B ile H arasında yer alan minimal maddeli bir Sayının biricik olduğunu göstermek kalıyor; bu da B ile H arasındaki sayısal kesimi tespit etmemizi sağlayacak.

Böyle iki sayı olduğunu varsayalım: Aşağıdaki gibi bir düzenleme karşımıza çıkacaktır:

$$B < N_1 < N_2 < H$$

Burada N_1 ve N_2 aynı (söz konusu konum için minimal) maddeye sahiptir.

N_1 ve N_2 aynı maddeye sahip olduğu için $N_1 < N_2$, ayırtacın N_1 'in atığında ve N_2 'nin biçiminde olmasını zorunlu kılar. Bu ayırtaç w olsun. N_1 'in N_1/w alt-Sayı-sını düşünelim. w , N_1 'in atığında olduğu için söz konusu alt-Sayı N_1 'in yüksek kümesine aittir, dolayısıyla N_1 'den daha büyüktür. Fakat w , N_1 ile N_2 'nin ayırtacı olduğu, dolayısıyla bunları ayırt eden en küçük ordinal olduğu için w 'ye kadar (w hariç) N_1 ile N_2 özdeşdir. Bundan N_1/w alt-Sayısı ile N_2/w alt-Sayısının özdeş olduğu sonucu çıkar. Dolayısıyla N_1/w ile N_2 'nin ayırtacı ancak w olabilir ve w , N_1/w 'nin maddesinin dışında ve N_2 'nin biçimindedir. Bunun sonucunda $N_1/w < N_2$ elde ederiz.

Nihayetinde aşağıdaki düzenlemeyle karşılaşırız:

$$B < N_1 < N_1/w < N_2 < H$$

Bu, N_1/w 'nin de B ile H arasında yer aldığı anlamına gelir. Fakat bu imkânsızdır, çünkü maddesi, B ile H arasında konum için minimal olduğu varsayılan N_1 'in maddesinden küçüktür.

Baştaki hipotezimizi reddetmemiz zorunludur: B ile H arasında minimal maddeli iki Sayı yoktur, sadece bir tane vardır.

B ve H adlı iki küme, aralarında yer alan minimal maddeli *bir* Sayıyı tekanlamlı olarak belirler. Bu sayı B ile H'nin kesimi olarak adlandırılacak ve N , B ile H arasındaki biricik kesim olarak tespit edilebildiği her durumda $N = B/H$ olduğunu ileri süreceğiz.

15.17 Çok özel bir kesim durumu bulunur: $N_1 < N_2$ olacak şekilde N_1 ve N_2 Sayılarını ele alalım. Elemanları sadece N_1 ve N_2 olan B ve H kümelerini, yani (N_1) ve (N_2) tekliklerini düşünün. Burada temel teoremin koşullarındayızdır, yani N_1 ile N_2 arasında minimal maddeli biricik bir N_3 Sayısı vardır. Böylece rasyoneller hakkında bahsettiğimiz klasik bir sıralılığın *yoğunluğu* koşulu tekrar karşımıza çıkar: İki Sayı arasında daima bir üçüncüsü, dolayısıyla da bir sonsuz vardır. Bunun haricinde bizim için ek bir belirlenim söz konusudur: N_1 ile N_2 arasında daima minimal maddeli *biricik* bir Sayı vardır.

Böylelikle her şeyin öngörmeye olanak verdiği, kesimin biricikliğinin sonsuzca en güçlü kavramı olduğu şeyi ileri sürüyoruz: Sayıların sıra düzeni yoğundur.

Fakat bundan daha derin olan şey, düşünce için bu sayılamaz yoğunluk, her Sayının yakınında tutarsızca var olan bu kaynaşma ile sayısallıkta hiçbir boşluk olmayacak şekilde dokuyu bir noktada kesen minimal maddeli Sayının bir olarak sayılması olanağı arasındaki korelasyondur.

Burada “kesim”, Sayının Doğa zemininde kestiği haliyle varlığın tutarsız dokusundaki düşüncenin keşiğini adlandırır. Tekilliğin bir kavramıdır. Belki de, en azından varlığın sıra düzeninde tekilliğin yegâne kavramıdır. Zira varlığın ötesine geçen bir başka tekillik vardır: olay.

16. Sayının yerinin sayılamaz büyüğü

16.1 Başlamadan önce bir özet.

1) Bir Sayı, bir parçası kesilmiş –Sayının biçimi, $F(N)$ – bir ordinaldir –Sayının maddesi, $M(N)$. Ayrıca ordinal-maddenin kesme dışında, biçim dışında kalan parçasını da düşünebiliriz: Sayının atığı, $D(N)$.

2) Bir N Sayısıyla ilişkili olarak bir ordinalin konumu, Sayının üç “bileşeni”nden birindeki –biçim, atık, madde– pozisyonudur (ait olması veya ait olmaması). Üç konum bulunur: biçimde, atıkta veya madde dışında.

3) N_1 ve N_2 gibi iki Sayının ayırtacı, iki Sayıda aynı tarzda konumlanmamış olan en küçük ordinaldir. Eğer ayırtaç yoksa nedeni iki Sayının eşit olmasıdır (madde-leri, biçimleri ve dolayısıyla atıkları aynıdır).

4) Ayırtacın konumuna göre iki farklı Sayı arasında (geçişli ve yansımaz) bir sıralılık bağıntısı tanımlanabilir. Bu $N_1 < N_2$ şeklinde gösterilir ve N_1 ’in N_2 ’den daha küçük olduğu söylenir. Bu bağıntı Sayılar alanında tamdır, yani herhangi iki farklı Sayı, N_1 ve N_2 verildiğinde daima ya $N_1 < N_2$ ya da $N_2 < N_1$ olacaktır.

5) Sıralılık bağıntısı yoğundur: $N_1 < N_2$ olacak şekilde iki Sayı verildiğinde daima N_1 ile N_2 arasına giren bir N_3 vardır: $N_1 < N_3 < N_2$.

6) N_1 maddesi W_1 olan bir Sayı olsun ve w_1 , W_1 ’den küçük bir ordinal olsun ($w_1 \in W_1$). w_1 hariç w_1 ’e ka-

dar N_1 ile aynı olan w_1 maddeli Sayı (bu Sayının biçimi N_1 'in biçiminde bulunan w_1 'den küçük ordinallerden oluşur) N_1 'in bir alt-Sayısı olarak adlandırılacaktır: N_1 'in w_1 noktasında bir "kesim"i olan N_1 'in alt-Sayısı. Bu alt-Sayı N_1/w_1 ile gösterilecek.

7) N_1 'in alt-Sayıları arasında bazıları N_1 'den daha küçüktür (w_1 , N_1 'in biçiminde olduğunda), diğerleri N_1 'den daha büyüktür (w_1 , N_1 'in atığında olduğunda). Birinciler küme olarak alındığında N_1 'in düşük kümesini oluşturur ve $Ba(N_1)$ ile gösterilir; ikinciler N_1 'in yüksek kümesini oluşturur ve $Ht(N_1)$ ile gösterilir.

8) N_1 'in şu anlamda düşük ve yüksek kümelerinin kesimi olduğu gösterilir: Düşük ve yüksek kümeleri arasında yer alan, Sayıların sırasına göre minimal maddeli Sayıdır (düşük kümesindeki her Sayıdan daha büyük ve yüksek kümesindeki her Sayıdan daha küçüktür).

9) Genel olarak, birinci kümedeki her şey ikinci kümedeki her şeyden küçük olacak şekilde iki Sayı kümesi verildiğinde bu iki küme arasında yer alan minimal maddeli biricik bir N Sayısı olduğu gösterilir. Bu iki küme B ve H ise, söz konusu N Sayısının B ile H 'nin kesimi olduğu söylenir ve $N = B/H$ yazılır. Böylelikle $N_1 = Ba(N_1)/Ht(N_1)$ şeklindedir. Bu tekil kesim, N_1 'in kanonik sunumu olarak adlandırılır.

16.2 Şimdi Sayıların sınırsız alanında dolaşacağız ve bunların bazılarını ve özellikle geleneksel Sayıları göstereceğiz: doğal tam sayılar, negatif tam sayılar, ordinaller, rasyonel sayılar, reel sayılar. Fakat ayrıca Sayıya dair miras aldığımız pratiğin sonluluğu ve sefaletinin bizi alıkoyduğu birçok başkasını da. Sayılar içinde sayılar

ne kadar da önemsiz kalıyor! Sayının varlığı, katedebildiğimiz kısmını her bakımdan aşar. Bununla birlikte gücümüz, varlığın düşünce karşısındaki bu fazlalığına dair bir düşüncemizin olmasıdır.

16.3 Sıfır.

Çok hususi bir Sayı var: maddesi ve sonuç olarak biçimi de boş olan $(0,0)$ sayısı. Söz konusu Sayı, madde olmadığında her türlü jestin noksanlığını sayısal bir jest olarak kaydeder. Mutlak Sıfırdır, sayısallığa sahip olmayan Sayıdır. Elbette bu Sayının ontolojik temeli boş kümedir, varlık olarak varlığın düşünülebilir olanda meydana geldiği, her metnin varlığına atılan dikiştir. Burada Sayı olarak düşündüğümüz kuşkusuz bu boşluktur. Fakat boşluğu Sayı olarak düşünmek bir fark yaratır. Örneğin boşluğu madde konumunda ya da sadece biçim konumunda görmek aynı şey, aynı Sayı değildir. Böylelikle biçimi boş olan $((0),0)$ veya $(1,0)$ Sayısı, Sayının Sıfınyla hiçbir şekilde özdeş değildir. Kuşkusuz onun da kesme jesti boştur, maddesinden hiçbir şeyi çekip almaz, fakat bu madde herhangi bir jestin noksanlığında bu jestin kesmeye bile başlamadığı şeyin gerçek tözünü vererek değişmemiş şekilde varlığını sürdürür. Yegâne hakiki Sıfır, her türlü sayısal jestten kendisini eksiltен şeydir çünkü bu jestin etkileyeceği hiçbir şey, hiçbir maddi ve doğal çokluk yoktur. Böylelikle Sıfır, sayısal kesme jestinin pozitif veya negatif her türlü değerlendirmesinin dışındadır. Kesinlikle ne pozitif ne de negatiftir. Değerlendirilebilir her türlü eylem için erişilemez halde kendi başına varlığını sürdürür. Sıfır, ontolojinin içinde Sayı gibi düşünülen varlık olarak varlıktır.

- 16.4 Bir parça metaforik bir şekilde Sıfırın ne pozitif ne de negatif olduğunu söylediğimize göre bu sıfatlara kesin bir sayısal anlam veremez miyiz? Temel cebir –öğrencilerin müphem sevinç kaynağı olarak– -4 gibi negatif tam sayıları takdim eder.

Örneğin maddesi ω limit ordinali ve biçimi eleman olarak sadece 0 ordinaline sahip olan N Sayısını düşünelim. Biçim bir başka ifadeyle 0'm tekliğidir ve N_1 sayısı $(\omega, (0))$ olarak yazılabilir. Bu Sayıyı Sıfırla, yani $(0,0)$ ile karşılaştırırsak ayırtaçlarının N_1 'in biçiminde ve Sıfırın maddesinin dışında olan (0 dahil her ordinal, hiçbir maddesi olmayan 0'ın maddesinin dışındadır) 0 olduğunu açıkça görürüz. Bu durumda sıralılık kuralları N_1 'in Sıfırdan *daha büyük* olduğunu söyler. N_1 'in *pozitif* olduğunu söylemek anlamlı olacaktır.

Şimdi maddesi yine ω limit ordinali olan fakat biçimi 1'in tekliği olan N_2 Sayısını düşünelim. Bu N_2 Sayısı $(\omega, (1))$ şeklinde yazılabilir. Bir kez daha N_2 ile Sıfırın ayırtacı 0'dır. Ayırtaç bu sefer N_2 'nin atığındadır, çünkü N_2 'nin biçimi 0'ı içermez (sadece 1'i içerir) ve 0 da dahil bütün sonlu ordinalerin limit koleksiyonu olduğu için ω 0'ı içerir. 0, Sıfırın maddesinin dışında ve N_2 'nin atığında olduğu için N_2 'nin sıfırdan *daha küçük* olduğunu görürüz. N_2 'nin negatif olduğunu söylemek anlamlı olacaktır.

- 16.5 *Pozitif Sayılar ve negatif Sayılar.*

Örneklerimiz şu şekilde genelleştirilebilir: Sıfır ile Sıfırdan farklı herhangi bir Sayının ayırtacı *daima* 0 boş kümesidir. Zira Sıfır, maddesi boş olan tek Sayı, dolayısıyla 0'm madde dışında konumlandığı biricik Sayıdır. Diğer her Sayı için 0'm konumu ya biçimde ya da atık-

tadır. 0 en küçük ordinal olduğu için Sıfır ile Sıfırdan farklı her Sayının kesinlikle ayırtacıdır.

Öyleyse durum oldukça basittir: Sıfırdan farklı bir Sayı 0'ı biçiminde içeriyorsa Sıfırdan daha büyüktür. Tersine 0 atığındaysa Sıfırdan küçüktür, çünkü her koşulda 0, Sıfırın maddesinin dışındadır.

Pozitif ve negatif Sayıları böyle tanımlayacağız: *Bir Sayı, 0 biçiminin elemanıysa pozitif ve 0 atığının elemanıysa negatiftir.*

16.6 Pozitif ve negatif Sayıların tanımının birkaç önemli sonucu.

- Sıfır maddesiz, biçimsiz ve atıksız olduğu için 0, Sıfırın ne biçiminin ne de atığının bir elemanı olabilir. 16.3'te verdiğimiz açıklamayı matematiksel bir kavrama dönüştürüyoruz: Sıfır ne pozitif ne negatiftir.

- Sıfır hiçbir şekilde en küçük Sayı değildir. Her negatif Sayıdan daha büyüktür ve negatif Sayılar açık bir şekilde sınırsız, tutarsız bir alan teşkil eder. Negatif Sayılar ile pozitif Sayılar arasında Sıfır, hiçbir çevresi olmayan şeyin merkezindedir.

- Sıfır dışsal işlemlerle tanımlanmaz, bir ardışıklığın "ilk" terimi gibi ya da bir işlemin "etkisiz elemanı" (bu, başka bir yerde ve ikincil olarak taşıyacağı bir niteliktir) gibi takdim edilmez. *Sayısal varlığında* tanımlanır. İşlemsel veya cebirsel her türlü düşünceyi içkin nitelendirmelere tabi kılan ontolojik yolumuzdan ayrılmayız.

- Daha genel olarak, "pozitif" ve "negatif" kategorileri Sayıların sıralılığı göz önüne alınarak yalnızca anlatım kolaylığı nedeniyle dahil edilmiştir. "0'ı biçimde

içermek” veya “0’ı atıkta içermek” yüklemeleri tamamen içseldir. Bir Sayının varlığının gözlemlenmesi tek başına ve başka bir Sayıyla karşılaştırma yapılmaksızın pozitif mi yoksa negatif mi olduğunun öğrenilmesine olanak verir.

- Pozitiflik hiçbir şekilde Sayının maddesinin “nice-liği”ne veya biçiminin kaplamına değil, sadece boşluğun konumuna bağlıdır. $(2, (0))$ Sayısı pozitifken maddesi ω ve biçimi 0 hariç bütün madde olan $(\omega, (\omega - 0))$ Sayısı negatiftir. İster madde, ister biçim söz konusu olsun sonlu sayısal pozitiflik ve sonsuz sayısal negatiflik vardır.

- Bir N Sayısı pozitifse, 0 bu Sayının biçiminde zorunlu olarak minimal şekilde yer aldığı için N’nin bütün N/w alt-Sayılarının da (her Sayının alt-Sayısı olan Sıfır, yani N/0 alt-Sayısı hariç) pozitif olduğu sonucu çıkar: N/w’nin biçiminin elemanları aslında w ordina-line kadar N’nin biçiminin elemanlarıdır ve şayet w, 0’dan farklıysa N pozitif olduğu için 0 bu elemanlar arasında yer alır. Benzer şekilde bir N negatif Sayısının Sıfırdan farklı her alt-Sayısı da negatiftir (N’de olduğu gibi, 0 atığında yer alır). Özel olarak pozitif bir Sayının düşük kümesinin boş olmayan elemanları ve yüksek kümesinin bütün elemanları pozitiftir; ve negatif bir Sayının düşük kümesinin bütün elemanları ve yüksek kümesinin boş olmayan elemanları negatiftir.

16.7 Negatif üzerine düşünceler.

Sayılar evreninin ileri sürdüğü haliyle negatif kavramı, görünürdeki paradoksallığının bütün derinliğine sahiptir. İlk bakışta negatif olanın tam da boşluğu Sayının biçimine dahil etmekten oluştuğunu düşünmek

mümkündür. Hiçliğin lekesinin damgalamadığı bir biçimde daha fazla pozitiflik yok mudur? Çokluğun hiçbir sunum işlemi yapmayan müphem belirtisini pozitif üretiminden defederse sayısal kesmenin *tamlığı* daha iyi bir şekilde sağlama alınmış olmaz mı?

Burada Sayı herhangi bir Mevcudiyet ontolojisi ayar-tısından kurtulmamızı salık verir. Sayının biçiminde boşluğun noksanlığı “pozitif” görünüyorsa bu, varlığın fiilen-sunulmuş olanın tamlığıyla özdeşleştirilmesi koşuluydur. Bu durumda hiçbir şey sunmayan her durumu, çoklu-referansın eksiltildiği her işareti negatife endeksleme ayartısına kapılırız. Fakat hakikat bambaş-kadır: Varlık olarak varlık tam da bu işaret dahilinde düşünceye gelir. Dolayısıyla biçiminde bu işareti taşıyan bir Sayıya göre taşımayan bir Sayının ontolojik saygınlığı *daha azdır*. Bir Sayının varlığının saygınlığı, üstünlüğü, meşru bir şekilde boşluk noktasından ölçülür. Sayısal üstünlük, düşüncenin kullanımına elverişli olanın üstünlüğünün simgesidir.

“Boşluğun işareti atığındaysa bir Sayı negatiftir” ifadesi, (eksiltmeli bir ontoloji için) ontolojik berraklığı Sayının etik hükmü diye adlandırılabilir şeyin dayanağını oluşturan bir ifadedir. Boşluğun tasdiklendiği her durumda (ve tekil olarak olay sonrası durumlar öyledir) Kötülüğün, bu tasdiklemeye tam da durumun atığıymış gibi davranılmasına karşılık geldiğini bir gün göstermeyi umut ediyorum. Kötülük, durumun bizzat varlığı olan boşluğun *biçimsiz* olarak alınmasıdır. Kötülüğün biçimleri dolu ve aydınlık tözü sahiplenir, boşluğun her işaretini defeder, bu işaretleri sınırlandırır, sürgün eder, kovalar, yok eder. Fakat Sayının hükmü

bize şöyle der: Bu dolu madde iddiasında, boşluğun vuku buluşlarına yapılan bu zulümde tam da negatif yer alır. A *contrario*, pozitiflik boşluğun işaretini biçimlerinde bir araya getirir ve barındırır. Ayrıca böyle yaparak içsel olarak daha üstün bir şekilde düşüncüyü varlığa uygun hale getirir.

Boşluğu atık olarak almak negatif bir işlem, nefret uyandıran bir “arındırma”dır. Her hakiki siyaset herhangi bir halk olayına sadakatte boşluğun, sunulmamış olanın, durumda sayılmayanın muhafızlığını en üst düşünce ve eylem ödevi olarak görür. Her şiir duyulur göndergelerin gizil boşluğunu tespit etmeye ve bunları dilin biçimsel sınırlarına götürmeye çabalar. Her bilim kendi tarihinin atığına, biçim dışında bıraktığına pozitif olarak davranır, çünkü orada tam da ifadeler sistemini tekrar kuracak veya formüle edecek şeyin ikamet ettiğini bilir. Son olarak, her aşk temellendirdiği iki cinsiyetin boş alanının hazzında kurulur ve bu bakış açısından tam, kaynaşmalı bir aşka dair romantik düşünce Bir’in arındırılmış göstergesi altında tam da aşkın Kötülüğüdür.

Sayının kavramını kurduğu haliyle negatif, düşünce ile varlığın *noktasal* uyumsuzluğudur. “Negatif”, biçimler ve biçim olmayan, biçimler ve atık [*déchet*] olmasına dayanak olan o biricik noktayı, sunulmamış olanın kisvesi altında varlığın boş yere düşünmediğimizi temin ettiği o noktayı terk eden [*choir*], değerini düşüren [*dé-chette*¹⁵] her türlü biçimlendirme girişimidir.

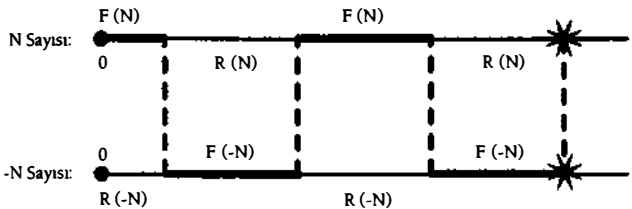
15 Fransızcada “atık” anlamına gelen *déchet* kelimesinin kökeni *déchoir* fiilidir.—çn

16.8 Bir Sayının simetriği.

Pozitif bir Sayıyı “negatife dönüştürmek” için çok fazla şey gerekmez: Biçiminden 0’ı çıkarmak yeterlidir. Sayı bize pozitif olanın güvencesizliğini, tözsel olmayan karakterini öğretir. *Tek bir noktanın* atığa aktarılmasının insafına kalmıştır. Ayrıca bu nokta, tüm noktalar arasında en şeffaf, hiçbir çoklu-sunuma dayanak olmayan noktadır: boşluğun işareti.

Bir terimin bir konumdan (burada biçim) “zıt” konuma (burada atık) aktarılması fikri genelleştirilebilir. N sayısını ve N’nin biçimi ile atığının tersyüz edilmesiyle elde edilen Sayıyı düşünelim. N’nin atığı biçim olarak terfi ettirilirken biçimindeki tüm terimler atık olarak düşer. Bu yeni Sayı, aynı ordinal-madde üzerinde, N’yi tanımlayan kesmenin tersi veya simetriği olan bir kesme uygular. Bu Sayıyı N’nin simetriği olarak adlandıracğız (göreceğimiz gibi merkezi Sıfır olan bir simetri). Bu Sayıyı $-N$ olarak göstereceğiz ve “eksi N”, N’nin simetriği olarak adlandıracğız.

Bir sayı ve bu sayının simetriği şu şekilde sunulabilir (12.3’teki şemalar kullanılarak):



Çizimde N’nin pozitif olduğu (0, biçimdedir) ve simetriği, $-N$ ’nin negatif olduğu açıktır. Her zaman

böyle olacağı aşikârdır. Tersine, N negatif olduğunda (0 , atığında olduğunda) $-N$ pozitif olacaktır (0 , biçimindedir).

N 'nin simetriği olan $-N$ 'yi aldığımızda, $-N$ 'nin simetriği $-(-N)$ şeklindedir, yani N 'ye geri döneriz: Yaptığımız, biçimi atığa ve sonra atığı biçime dönüştürmektir. Bu, hem Hegel hem de sezgiciliğe kendiliğinden zıt olan, sınıfta öğrendiğimiz o eski yasadır: İki olumsuzlama işlemi bizi baştaki olumlamaya geri götürür. Bununla birlikte $-(-N)$ 'nin illa pozitif bir Sayı olmadığına hep olduğu gibi dikkat gösterilmelidir. Başlangıçtaki N Sayısı negatifse bu Sayının simetriği pozitifdir ve simetriğinin simetriği $-$ yani kendisi-yine negatiftir. “ $-$ ” göstergesi olumsuzlamanın değil, simetrinin göstergesidir. Bu da negatifin (simetrinin tersine) işlemsel bir boyut olmadığını doğrular. Sayının varlığının yapısal bir yüklemidir.

16.9 Birkaç örnek.

$(\omega, (0))$ Sayısının simetriği nedir? Biçimi 0 hariç ω 'nin tamamı olan $(\omega, (\omega - 0))$ Sayısıdır. Bu Sayının negatif olduğu aşikârdır.

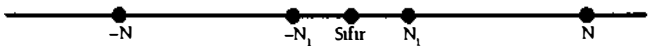
Biçimi 1 'in tekliği olan $(2, (1))$ Sayısının simetriği nedir? Biçimi (0) 'ın tekliği olan pozitif $(2, (0))$ Sayısıdır. Gerçekten de 2 ordinalinin tek elemanları 0 ve 1 'dir. İlk durumda 0 atığı, ikinci durumda biçimi oluşturur.

Pozitif bir N Sayısını ve bu Sayının simetriği olan $-N$ sayısını ele alalım. Sıfır ile N “arasında” yer alan her Sayıya $-N$ ile Sıfır “arasında” yer alan bir Sayının tekabül etmesini sağlayabiliriz: Sayının simetriğini almak yeterlidir. Gerçekten de Sıfır $< N_1 < N$ ise $-N < -N_1 < \text{Sıfır}$ olacağı açıktır. $-N$ 'nin N 'nin biçimiyle atığını değiştir-

diği akılda tutularak, N_1 ile N arasındaki tüm mümkün eşitsizlik durumları incelenerek bu doğrulanabilir (bkz. 13.13).

– N ile Sıfır arasında, Sıfır ile N arasındaki “kadar çok” Sayı bulunur, çünkü $f(N_1) = -N_1$ fonksiyonu Sayıların iki “kesiti” arasında birebir ve örten bir eşlemedir. Fakat dikkat! Bu eşleme iki küme arasında değildir. Sıfır ile N arasındaki aralık, bütün Sayılar alanı gibi, tutarlı bir bütünlük oluşturmaz. Bu kolaylıkla ispatlanabilir: Örneğin $(2, (0))$ Sayısını düşünürsek W ’nin 2’den büyük herhangi bir ordinal olduğu $(W, (0))$ türü tüm Sayıların $(2, (0))$ ’dan küçük olduğunu biliriz. Bu, 13.16’da keşfettiğimiz yasadır: Biçim aynı kalırken madde artırılırsa Sayı küçülür. Bu arada, 0 biçiminde yer aldığı için bütün $(W, (0))$ Sayıları pozitifdir. Dolayısıyla bu Sayılar, 2’den büyük olan (yani, Sıfır ile $(2, (0))$ arasında yer alan) ordinaller “kadar çok”tur. Fakat “2’den büyük tüm ordinaller”in tutarsız bir çokluk olduğunu kesin şekilde biliyoruz.

Bunu akılda tutarak simetriyi aşağıdaki şekilde görselleştirebiliriz (buradaki aks, sıralarına göre alınmış Sayılar aksıdır):



Bu, merkezi Sıfır olan bir simetriden bahsedebilmemizi haklı çıkarır.

16.10 Ordinaler.

Sayıların varlığının kumaşını oluşturan ordinalerin de Sayılar olarak temsil edilebileceğini uzun süre önce

ifade etmiştik (örneğin, bkz. 8.8). Ordinalleri temsil eden Sayılar neye benzer?

Maddeyi W ordinali olan ve biçimi bu maddenin *tamamını* muhafaza eden (W, W) Sayısını düşünelim. Başka bir deyişle bu, maksimum bir sayısal kesme veya –bazı çağdaş sanatçıların yaptığı gibi– ham maddeyi tek başına “eser” olarak sergileme durumudur. En ilginç (W, W) Sayısını, biçimi boşluk olan $(W, 0)$ Sayısıyla karşılaştırmak olacaktır. Her iki durumda da kesme jestinin hükümsüz olduğunu hissederiz. Fakat iki hükümsüzlük farklıdır. (W, W) Sayısı *maddenin tamamına bir biçim olarak* davranırken $(W, 0)$ Sayısı *maddeye herhangi bir biçim kaydetmez*. Bunun dolaysız bir sonucu, 0 hariç herhangi bir W için (W, W) Sayısının pozitif bir Sayı ve $(W, 0)$ ’ın negatif bir Sayı olduğudur (0 , 0 ’ın bir elemanı *değildir* ve bundan dolayı da 0 , $(W, 0)$ ’ın biçiminde *değildir*). Maddeyi biçim olarak tayin eden birinci jestte belirli bir pozitiflik ayırt etsek de madde tarafından bastırılan ikincisi hiçbir şey tayin edemez.

Fakat (W, W) Sayısına pozitif bir üretim, bir maddenin biçim olarak üstlenilmesi olarak davranılsa da bu üretimin ordinal-maddeyi tekrarladığı bir gerçek olarak kalır. Ordinalin bu şekilde tekrarlanması (madde ve sonra biçim olarak), (W, W) şeklindeki Sayılara ordinallerin sayısal temsilcileri olarak davranmamızı meşrulaştırır.

Öyleyse bunu şöyle ifade edebiliriz: *Bir W ordinali Sayı olarak (W, W) şeklinde, yani maddesi W ve biçimi W olan Sayı olarak sunulur.* Bu sunum, *Sayı olarak düşünülen ordinalin “kendisi”dir.*

16.11 Bunun, ordinalin “kendisi” olduğundan emin olmak için Sayıların sıra düzeninin ordinallerin sıra düzenine, yani ait olmaya uyduğunu açık bir şekilde ispatlamamız gerekir. Başka bir deyişle, –ordinaller kendi alanında düşünüldüğünde– $W_1 \in W_2$ ise, –ordinaller Sayılar olarak düşünüldüğünde– $(W_1, W_1) < (W_2, W_2)$ olmalıdır.

Durumun böyle olduğu aşikârdır. Zira (W_1, W_1) ile (W_2, W_2) ’nin ayırtacı zorunlu olarak W_1 ’e ait olduğu halde W_2 ’ye ait olmayan ya da W_2 ’ye ait olduğu halde W_1 ’e ait olmayan en küçük ordinaldir. $W_1 \in W_2$ ise bu en küçük ordinal tam da W_2 ’ye ait olan ama kendine ait olamayan W_1 ’dir. $W_1, (W_1, W_1)$ ’in maddesinin dışında ve (W_2, W_2) ’nin biçimindedir. Dolayısıyla gerçekten de $(W_1, W_1) < (W_2, W_2)$ şeklindedir.

Öyleyse Sayı olarak, maddi varlıklarının biçimsel tekrarlanması olarak düşünülen ordinallerin sıra düzeni, varlıklarında, bütün elemanları geçişli olan geçişli bir küme olarak düşünülen ordinallerin sıra düzeniyle aynıdır. Ordinallerin Sayısal temsili yapısal olarak ordinallerle izomorftur. Böyle olduğuna göre, ordinallerin “kendilerinin” Sayıların sıra düzenine kaydolduğunu, aynı şekilde temsil edildiğini düşünmemek için herhangi bir neden yoktur.

16.12 Bir ordinalin (W, W) biçiminde bir Sayı olduğu gerçeğinden üç sonuç çıkarılabilir:

- Bir ordinalin her alt-Sayı bir ordinaldir. (W, W) bir ordinalse, $w_1 \in W$ olmak üzere bir alt-Sayı (w_1, w_1) biçiminde olacaktır. Dolayısıyla bu, w_1 ordinalidir.

- Tüm bu alt-Sayılar açık bir şekilde baştaki ordinalden daha küçük ordinailler olacaktır. Sonuç olarak, *bütün* bu alt-Sayılar baştaki ordinalin düşük kümesindedir ve genelde bu Sayıdan daha büyük alt-Sayılardan oluşan yüksek kümesi burada boştur. Bu, Sayı olarak düşünülen ordinaillerin karakteristik bir özelliğidir. Genel olarak, yüksek kümenin bir alt-Sayısı, w_1 N'nin atığında olacak şekilde bir N/w_1 alt-Sayısıdır. Gelgelelim bir ordinal söz konusu olduğunda *atık boştur* (ayrıca bu, ordinaillerin bir tanımı olabilir). Dolayısıyla bir ordinalin yüksek kümesi de boştur; ve tersine, bir Sayının yüksek kümesi boşsa atığı boş olduğu içindir. Biçimi maddesiyle çakışır; bu, bir ordinaldir.

Böylelikle bir ordinalin kanonik sunumu $Ba(W)/0$ şeklinde olacaktır. Fakat ayrıca, düşük kümenin elemanları W 'den küçük *bütün* ordinailler olduğu için, bir küme olarak W ile özdeştir (her ordinal, kendinden küçük tüm ordinaillerin kümesidir, bkz. 11.2). Son olarak, Sayı olarak düşünülen bir W ordinalinin –en ayırt edici– kanonik temsili basitçe $W/0$ şeklindedir.

- Bir (W, W) ordinalinin simetriği, biçim ile atığın tersyüz edilmesiyle elde edilir. Ama burada atık boştur. Dolayısıyla W olan “toplam” biçim yerine boşluk gelecektir: (W, W) Sayısının simetrik karşıtı $(W, 0)$ Sayısıdır. Sayı olarak düşünüldüğünde bir W ordinali bir simetriğe olanak verir, dolayısıyla $-W$ Sayısından rahatlıkla bahsedilebilir.

0 haricindeki her ordinalin pozitif bir Sayı olduğu açıktır, zira biçimi W , 0'ı eleman olarak içerir. Boşluk dışında her ordinalin simetriği, $(W, 0)$ yazımında da doğrudan görülebileceği gibi negatif bir Sayıdır. Ayrıca

bir W ordinalinin tüm özelliklerinin $-W$ 'ye geçişte ters-yüz olduğu görülecektir. Böylece $-W$ 'nin her alt-Sayısı, W 'den küçük bir w_1 ordinalinin simetriği olan $-w_1$ 'dir; $-W$ 'nin düşük kümesi boştur, çünkü $-W$ 'nin biçimi boş olduğu için $-W$ 'nin her alt-Sayısı ondan büyüktür; ve son olarak $-W$ 'nin yüksek kümesi $-W$ 'yle özdeştir ve bunun kanonik temsili $0/-W$ şeklindedir.

Dolayısıyla ordinallerin Sayılar olduğu kesindir.¹⁶ Fakat buna ek olarak sayısalık açısından alındığında ordinaller simetrikleştirilebilirdir: Sıfır'ın (Sıfır, Sayı olarak düşünülen 0 ordinalidir) ötesinde, önceden düşünülemez olan bu varlıkların kaydolacağı engin bir uzam açmış olduk: negatife tabi tutulan doğal çokluklar. Sayısalık, doğayı *simetrikleştirmeye* muktedirdir.

16.13 Pozitif ve negatif tam sayılar.

Varlıkları içinde düşünülen doğal tam sayılar sonlu ordinallerden, yani ilk sonsuz ordinal olan ω 'den başkası değildir. Ayrıca 11. bölümde bunların tanımı ve işlemsel boyutlarını vermiştik.

Önceden söylediklerimiz meseleyi çözer: Sayı olarak düşünüldüğünde, n bir sonlu ordinal olmak üzere, *tam sayılar* (n,n) türündedir. Bunların pozitif olduğu açıktır. Sayı olarak doğal tam sayıların sıra düzeni, bildiğimiz haliyle doğal sayıların sıra düzeniyle (bir öğ-

16 Önceki bölümün 5 ve 6 numaralı notlarında işaret etmiş olduğumuz gibi, pozitif ve negatif ordinallerin hayli ilginç "topolojik" bir özelliği, her Sayı kümesinin üst sınırının bir ordinal olması ve alt sınırının bir ordinalin negatifi olmasıdır. Her ordinalin, kendisiyle boşluğun kesimi ve bir ordinalin negatifinin boşlukla kendisinin kesimi olması dolayısıyla bu kolaylıkla açıklanabilir.

rencinin n 'nin p 'den daha büyük olduğunu söylemesini sağlayan sıra düzeniyle) çakışır. Geleneksel sıra düzeninin ontolojik versiyonunda $p \in n$ ise, Sayıların sıra düzeninde $(p,p) < (n,n)$ olur. Bir ordinalin Sayıların alanına “bizzat” kaydolduğuna işaret etmek için (W,W) sayısını W şeklinde yazma hakkımız vardır. Dolayısıyla Sayı olarak düşünülen bir doğal tam sayıyı n şeklinde yazarız.

Bir doğal tam sayının alt-Sayıları, kendisinden küçük sonlu ordinailler, yani kendisinden küçük doğal tam sayılardır. Bu Sayı n ise $(0,0), (1,1), \dots, ((n-1), (n-1))$ doğal tam Sayıları söz konusudur ve bunlar $0, 1, \dots, (n-1)$ şeklinde de yazılabilir. Bunlar birlikte n 'nin düşük kümesini oluşturur. n 'nin yüksek kümesi boştur ve Sayı olarak düşünülen bir n tam sayısının kanonik temsili $(0, 1, \dots, (n-1))/0$ şeklindedir. n 'nin elemanları tam da $0, 1, \dots, (n-1)$ olduğu için, bunların elemanı olduğu düşük küme $n/0$ şeklinde yazılabilir. (Dikkat! Bu döngüsel değildir çünkü *bir küme* gibi düşünüldüğünde n kendisini bir eleman olarak içermez).

Bir doğal tam Sayının simetriği, n sonlu bir ordinal olmak üzere $(n,0)$ biçiminde bir Sayıdır. Bunu $-n$ diye yazarız ve “eksi n ” olarak okuruz. *Doğal bir tam Sayının, dolayısıyla $(n,0)$ biçiminin simetriği*yse *bir Sayının negatif tam Sayı olduğunu* söyleyeceğiz. $p \in n$ için, bir $-n$ negatif tam Sayısının alt-Sayıları tüm $-p$ tam sayılarıdır. Bunlar birlikte, düşük kümesi boş olan $-n$ 'nin yüksek kümesini oluştururlar. Sonuç olarak negatif bir tam Sayının kanonik temsili $0/-n$ şeklinde yazılacaktır.

Geleneksel pozitif ve negatif tam sayıların pozitif ve negatif tam Sayılarla tam özdeşliğini doğrulamak için,

sıralılıkta olduğu gibi Sayılar üzerindeki işlemlerin sayılar üzerindeki işlemlerle elbette çakışması zorunludur. Örneğin Sayılar üzerinde $N_1 + N_2$ gibi bir toplama işlemi tanımlıyorsak özel olarak tam sayılarda, yani $m+n$ tarzı bir toplama işleminde bu işlemin sonucunun okuldaki hesaplamalarımızdaki gibi iki tam sayının toplamına karşılık gelen tam sayıyla “aynı Sayı” olması gerekir. Bu işlemsel doğrulamalar 18. bölümde yapılacaktır.

Varlığı içinde düşünülen doğal tam sayıların Sayılara kaydedilmesi bakımından görevimizi tamamlamış bulunuyoruz.

16.14 Pozitif diyadik rasyonel sayılar.

Dedekind kesimleriyle ilişkili olarak rasyonel sayılardan daha önce bahsetmiştik (bkz. 15.5): Pozitif bir rasyonel sayı (veya sıfır) iki doğal tam sayının bir kesri veya $\frac{p}{q}$ oranıdır; yani tam sayılardan oluşan bir $\langle p, q \rangle$ çiftidir. Birinci terim *pay*, ikincisi *payda* olarak adlandırılır. Pay sıfır (boş kümeyle özdeş) olabilir fakat paydanın 0 olması yasaktır ($\frac{p}{0}$ oranının “belirsiz” olduğunu biliyoruz).

Burada söz konusu geleneksel sayıları özenle tanıtmamıza hiç gerek yok (aslında indirgenemez, daha fazla sadeleştirmeye izin vermeyen kesirleri düşünmek gerekiyor). Kesre dair sezgisel fikir bizim için yeterli.

Doğal tam sayıların, sıfır veya pozitif rasyonel sayıların bir alt-kümesi olduğu açıktır: n 'yi elde etmek için rasyonel sayıyı $\frac{n}{1}$ şeklinde almak yeterlidir. Ya da şöyle ifade edebiliriz: Bir tam sayı, $\langle n, 1 \rangle$ türünde bir rasyonel sayıdır.

Rasyonel sayılar üzerindeki klasik sıra düzeninin yoğun bir sıra düzeni olma gibi temel bir özelliği vardır. Başka bir deyişle (bkz. 15.5), $\frac{p_1}{q_1} < \frac{p_2}{q_2}$ olacak şekilde $\frac{p_1}{q_1}$ ve $\frac{p_2}{q_2}$ gibi iki rasyonel sayı verildiğinde bu iki sayı birbirine ne kadar “yakın” olursa olsun bu iki sayının arasına girecek bir üçüncü sayı (ve dolayısıyla sonsuz sayı) daima vardır: $\frac{p_1}{q_1} < \frac{p_3}{q_3} < \frac{p_2}{q_2}$ olacak şekilde bir $\frac{p_3}{q_3}$ vardır.

$\frac{p}{2^n}$ biçimindeki sayılar, yani paydanın 2’nin bir kuvveti olduğu sayılar *diyadik rasyonel sayı* olarak adlandırılır. Ya da ikili versiyonuyla yazarsak: $\langle p, 2^n \rangle$.

Diyadik rasyonel sayılar da rasyonellerden oluşan yoğun bir alt-küme oluşturur: r_1 ve r_2 , $r_1 < r_2$ olacak şekilde rasyonel sayılarsa, bunlar arasında diyadik bir rasyonel sayı bulmak her zaman mümkündür.

Bizim için önemli olan $r_1 < r_2 < \dots < r_n < \dots$ gibi her artan dizinin yerine $d_1 < \dots < d_n < \dots$ gibi bir diyadik rasyoneller dizisi geçirmenin mümkün olmasıdır: r_1 ile r_2 “arasındaki” diyadik rasyonel sayıları, sonra r_2 ile r_3 , vs. arasındakileri alırız. Ayrıca diyadik rasyonel sayıların, bütün rasyonel sayıların bir “tabanı”nı oluşturduğu söylenebilir. Özel olarak, diyadik olmayan bir rasyonel sayıya bir diyadik rasyonel sayıyla istediğimiz kadar “yaklaşabiliriz”, zira r ne kadar küçük olursa olsun r ile $r+r'$ arasında her zaman bir diyadik rasyonel sayı bulunabilir.

16.15 Böylece aşağıdaki ifadeyi elde ederiz; sayıların (gele-
neksel) Sayılarda (ontolojik) temsil sürecinde muhtemelen en önemli ifadedir bu:

Her diyadik rasyonel sayı, sonlu maddeli bir Sayıyla temsil edilebilir ve sonlu maddeli her Sayı, bir diyadik rasyonel sayıyı temsil eder.

- 16.16 Genel olarak, maddesi sonlu olan bir Sayı nasıl sunulur? $(n, (p_1, p_2, \dots, p_i))$ biçimindedir: Burada Sayının biçimini oluşturan $p_1, p_2, \dots$ vs. tam sayıları, Sayının maddesi olan n 'den daha küçük olan tam sayılardır. Pozitif rasyonel sayılarla ilgilendiğimiz için sadece pozitif sonlu maddeye sahip Sayıları, yani biçiminde 0 olan Sayıları dikkate alıyoruz.

Sonlu maddeli bu Sayıların sıfır veya pozitif diyadik rasyonel sayılarda "izdüşümü"ne yol gösteren incelikli düşünce şu şekildedir. n , Sayının maddesi olsun. 0 'dan n 'de bulunan en büyük tam sayı olan $n-1$ 'e kadar bu maddenin bütün elemanlarını sıralarına göre alırız. Birinci elemanın, yani 0 'ın konumunu –Sayı pozitif olduğu için konum biçimidir– muhafaza ettiğimiz sürece söz konusu tam sayıya 1 değerini veririz. n 'nin 0 ile aynı konuma sahip olmayan ilk elemanına, yani p 'ye, başka bir deyişle Sayının maddesinin atıkta olan en küçük p tam sayısına varırız. Bu tam sayıya $-\frac{1}{2}$ değerini veririz. Daha sonra genel olarak eğer biçimde konumlanıyorlarsa q tam sayılarına $\frac{1}{2^{q-p+1}}$ değerini, atıktaysa $-\frac{1}{2^{q-p+1}}$ değerini veririz.

Son olarak, p 'nin ötesindeki son terimin değeri (p daima, varsa, 0 'la aynı konuma sahip olmayan ilk terimdir), yani $n-1$ 'e verilen değer, $n-1$ 'in atıkta veya biçimde olmasına göre – işaretinin uygulanacağı $\frac{1}{2^{n-p}}$ değeri olacaktır.

Şöyle de ifade edilebilir: Atığa ait olma daima – işareten etkilenecektir. n 'nin q elemanları sıraya göre katedildiğinde 0'ın konumu olan biçimde kaldığımız sürece elemanları 1 olarak, yani bir tam sayı değeriyle sayarız. Konum değiştiği anda $\frac{1}{2^{q-p+1}}$ şeklinde bir diydik rasyonel sayı olarak sayarız: Burada p , konum değişikliği olan ilk sayıdır. Bu konum ne zaman atıkta olsa bundan böyle – işareti konulur.

Son olarak, n 'nin elemanlarına bu şekilde atfedilmiş tüm değerlerin toplamını (yaygın anlamında) alarak elde edilen rasyonel sayıyı ilk baştaki sonlu maddeli Sayıyla ilişkilendiririz. Tüm paydalar diyadik olduğu için bu rasyonel sayı da diyadiktir ve öğrencilerin bildiği gibi kesirli sayıları toplamak için payda olarak, paydaların en küçük ortak katını alırız. İkinci kuvvetlerinin en küçük ortak katı yine ikincinin bir kuvvetidir.

16.17 Bu prosedürün örneklerini verelim. Sonlu maddesi 5 ordinali olan ve biçimi 0, 1 ve 3'ü içeren (5, (0,1,3)) Sayısını alalım. Bu durumda atık 2 ve 4'ten oluşur.

0 biçimde olduğu için ona 1 değerini veririz.

1 de biçimde olduğu için ona da 1 değerini veririz.

2 ile birlikte konum değişir ve atığa geçer. Dolayısıyla buna $-\frac{1}{2}$ değerini veririz.

3 biçimdedir, $\frac{1}{2^{3-2+1}} = \frac{1}{2}$ değerini veririz.

4 atıktadır, $-\frac{1}{2^{4-2+1}} = -\frac{1}{2^3}$ değerini veririz.

Son olarak, (5,(0,1,3)) Sayısına karşılık gelen rasyonel sayı aşağıdaki toplamla elde edilecektir:

$$1 + 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} = \frac{13}{2^3}$$

Bir diyadik rasyonel sayının söz konusu olduğu açıktır.

16.18 Sonlu maddeli pozitif Sayılar ile pozitif diyadik rasyonel sayılar arasında bir izomorfi, bir varlık özdeşliği olduğu görülecek olan bu eşlemenin inşasını daha iyi göstermek amacıyla bir parça formelleştireceğiz. Böylelikle tümevarımsal veya yinelemeli bir tanımın söz konusu olduğunu açıkça göreceğiz.

Sonlu maddeli pozitif bir Sayı düşünelim. Sayının n maddesinin elemanları üzerinde tanımlanmış aşağıdaki f fonksiyonunu yinelemeyle tanımlayacağız:

1. kural: $f(0) = 1$.

2. kural: Eğer p dahil p 'ye kadar bütün tam sayılar için $f(p) = 1$ ise ve $p+1$ Sayının biçimindeyse $f(p+1) = 1$.

3. kural: Eğer p dahil p 'ye kadar tüm tam sayılar biçimindeyse ve $p+1$ atıktaysa $f(p+1) = -\frac{1}{2}$.

4. kural: p 'nin değeri $\frac{1}{2^q}$ veya $-\frac{1}{2^q}$ ise ve $p+1$ biçimdeyse $f(p+1) = \frac{1}{2^{q+1}}$.

5. kural: p 'nin değeri $\frac{1}{2^q}$ veya $-\frac{1}{2^q}$ ise ve $p+1$ atıktaysa $f(p+1) = -\frac{1}{2^{q+1}}$.

Bu, baştaki Sayının maddesi olan n 'nin bütün elemanlarının rasyonel değerini f fonksiyonuyla hesaplamaya olanak verir. N 'ye karşılık gelen diyadik rasyonel sayıyı $Ra(N)$ ile göstererek aşağıdakini söyleyebiliriz:

$$\text{Ra}(N) = f(0) + f(0) + \dots + f(n-1)$$

Buradaki + işareti yaygın anlamda cebirsel toplamı göstermektedir.

$\text{Ra}(N)$ 'nin diyadik bir rasyonel sayı olduğu açıktır.

16.19 Yeni bir örnek, sonlu maddeli pozitif bir Sayı olan $(4, (0, 1, 3))$ üzerinden hesaplamaya devam edelim:

$$f(0) = 1 \text{ (1. kural).}$$

$$f(1) = 1 \text{ (2. kural).}$$

$$f(2) = -\frac{1}{2} \text{ (3. kural; 2 atıktadır).}$$

$$f(3) = \frac{1}{2^{1+1}} = \frac{1}{2^2} \text{ (4. kural; 3 biçimdedir).}$$

Öyleyse:

$$\text{Ra}((4, (0, 1, 3))) = f(0) + f(1) + f(2) + f(3).$$

$$\text{Ra}((4, (0, 1, 3))) = 1 + 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2}.$$

$\text{Ra}((4, (0, 1, 3))) = \frac{7}{2^2}$ olur ve bu da söylemiş olduğumuz gibi diyadik bir rasyonel sayıdır.

16.20 *Bir Sayının tam sayı ordinal parçası.*

Ele alınan sonlu maddeli Sayıda 0 ile aynı konumda olmayan ilk p tam sayısına varılınca prosedürü birden değiştirmek tuhaf görünebilir. H. Gonshor¹⁷ bunun farkındadır: “İlk işaret değişikliğinde sıradan bir sayımadan ikili bir hesaplamaya atlama fikri ilk başta biraz

17 Bkz. Gonshor, *An introduction to the theory of surreal numbers*, a.g.e., s. 32.

garip görünebilir. Bununla birlikte, yeterince zengin bir sistemde böyle fenomenler kaçınılmaz gibidir". Gonshor'un bu açıklaması –ki daha çok bir özre benzer– biraz kısa kalır.

Temelinde yatan gerçek kavramı bulmak amacıyla sonlu maddeli bir N Sayısının başlangıçtaki 0 terimiyle aynı konuma sahip olan ilk ardışık p ordinalini neyin temsil ettiğini sormak daha uygundur. Akıl yürütmemizi yine pozitif durumda (0 'ın biçimde olduğu durumda) gerçekleştirelim. N 'yi p noktasında (ordinallerin sıra düzeninde konumu değişen ilk ordinal) böldüğümüzde *bütün elemanları 0 ile aynı konuma sahip olan bir N/p alt-Sayısı elde ederiz.* Bu konum biçim olduğu için N/p 'nin p pozitif tam sayısı, yani maddesi p olan ve biçimi p 'nin elemanlarından oluşan Sayı olduğu açıktır. f fonksiyonu üzerinden eşlemede tüm bu elemanlara 1 değeri atfedilecek ve $1+1+...$ değerlerinin toplamı "klasik" p tam sayısını verecektir. Daha sonra q 'nun 1 'i geçemeyeceği $\frac{1}{2^q}$ veya $-\frac{1}{2^q}$ türü diyadik rasyonel sayıların cebirsel toplamı eklenir. Sonuç olarak $Ra(N)$, p tam sayısı ve (en azından, bir tam sayı söz konusu değilse) -1 ile 0 arasında negatif bir diyadik kesrin toplamı olacaktır. Son olarak p , $Ra(N)$ pozitif tam sayısının bir tür *tam sayı parçası*, yani $Ra(N)$ 'ye "üstten" en yakın olan doğal tam sayıdır: $(p - 1) < Ra(N) < p$ olur.

Sayı bakımından p , N 'nin *ordinal olan en büyük alt-Sayısıdır*, zira "bir ordinal olmak" tam anlamıyla maddesinin tamamı biçimde olan bir Sayı olmak anlamına gelir. p noktasında konumun değişmesi (p , atıktadır) tam da $N/p + 1$ 'in artık bir ordinal olmadığı

anlamına gelir, çünkü maddesinin bir elemanı olan p atıktadır. Dolayısıyla p 'nin N 'nin “tam sayı parçası” olduğunu söylemek uygundur. Şöyle de denebilir: N 'nin maddesine ait olan ve N/p alt-Sayısı p ordinali olacak şekilde en büyük p tam sayısı. Ya da daha basit bir şekilde: N 'nin tam sayı parçası, N 'nin bir alt-Sayısı olan en büyük ordinaldir.

Öyleyse prosedür açıklığa kavuşur: Önce f üzerinden N 'nin tam sayı parçasının elemanlarını $Ra(N)$ diyadik rasyonel sayısının “üstten” tam sayı parçasıyla eşlemeyi hedefler. Bunun için 1 değerleri kullanılır. Daha sonra 0'dan küçük ve -1 'den büyük geri kalanı hesaplanır ve bunun için q , p tam sayı parçasının ötesinde düşünülen ordinalin mertebesini göstermek üzere, $\frac{1}{2^q}$ veya $-\frac{1}{2^q}$ türü diyadik kesirli sayılardan faydalanılır. Dolayısıyla tüm bunlarda “doğal olmayan” hiçbir gizem yoktur, tersine derin bir mantık vardır.

16.21 Bu açıklamaları genelleştirebiliriz. W maddesinin pozitif bir N Sayısı verildiğinde, N/w_1 alt-Sayısı w_1 ordinali olacak şekilde, en büyük $w_1 \in W$ ordinalini N 'nin tam sayı ordinal parçası olarak adlandıracağız.

Dikkatli bir okur duraksayacaktır: Bir özelliği karşılayan “en büyük ordinal”den nasıl serbest bir şekilde bahsedebiliriz? Limit ordinallerin varlığı bu sava karşı değil midir? Ordinaler söz konusu olduğunda sadece minimallik işe yarar.

Mükemmel bir uyarıdır bu. Dolayısıyla tanımımızı yeniden ifade edeceğiz: Pozitif bir Sayının tam sayı ordinal parçası, atıkta konumlanan en küçük ordinaldir. Sayı pozitif olduğu için 0'm konumu biçimdir. Atıkta

konumlanan en küçük ordinal, kendisi atıkta olsa bile bütün elemanları biçimde olan N 'nin maddesinin ordinallerinin artan sırasındaki ilk ordinaldir. Bu elemanlar N 'nin ordinal tam sayı parçasını oluşturur. İşte “en büyük”ün “en küçük” olarak tercüme edilmeye olanak verdiği bir durum.

Eğer w_1 pozitif bir N Sayısının tam sayı ordinal parçasıysa, tıpkı sonluda olduğu gibi $N < w_1$ olur, çünkü N 'nin maddesinin elemanı olarak düşünülen w_1 alt-Sayı, kendi maddesinin dışındayken N 'nin atığındadır. Ayrıca bir pozitif Sayının tam sayı ordinal parçasının söz konusu Sayının yüksek kümesinde olduğu da söylenebilir.

Eğer w_1 bir ardıl ordinalse sonlunun “çerçevesi” yine karşımıza çıkar. w_2 , w_1 'in önceliyse $w_1 = S(w_2)$ olur. w_1 , atıkta olan *en küçük* ordinal olduğu için önceli w_2 biçimdedir. Elbette w_2 'nin bütün elemanları w_1 'in elemanları olduğu (ordinallerin geçişliliği) ve w_1 'in bütün elemanları biçimde olduğu için w_2 'nin bütün elemanları da biçimdedir ve dolayısıyla N/w_2 , w_2 ordinaldir. Ayrıca bu ordinal kendi maddesinin dışında ve N 'nin biçiminde olduğu için $w_2 < N$ 'dir ve nihayetinde $w_2 < N < S(w_2) = w_1$ olur. Aranılan çerçeve budur.

Tersine, w_1 bir limit ordinalse daima $N < w_1$ olacaktır, fakat N 'den küçük en büyük ordinali aramak nafile olacaktır, çünkü w_1 'in ötesinde hiçbir “öncel” yoktur. N 'nin tekil bir konumu olacaktır: Bir limit ordinalden daha küçüktür ve *bu limit ordinalden küçük bütün ordinallerden daha büyüktür*. Limiti önceleyen ordinaler tarafından “doldurulduğuna” inandığımız o uzama, bir limit ordinal ile limiti olduğu ardıl ordinallerin sonsuzluğu “arasındaki” uzama eklenecektir.

16.22 Bir örnek verelim. $N = (S(\omega), (S(\omega) - (\omega)))$ Sayısını alalım: Bu Sayının maddesi ω 'nin ardılıdır ve biçimi, atığın tek elemanı olan ω hariç maddenin tamamıdır. Limit ordinal ω N'nin maddesinin atıkta olan ilk ordinali olduğu için N'nin tam sayı ordinal parçasıdır. Bunların ayırtacı N'nin atığında ve ω 'nin maddesi dışında olan ω olduğu için $N < \omega$ olur. Ayrıca ω 'nin her elemanı, dolayısıyla her n doğal tam sayısı için $n < N$ olur, çünkü n , n'nin maddesi dışındadır ve N'nin biçimindedir. Dolayısıyla N Sayısı aynı zamanda ilk limit ordinali ω 'den daha küçük ve ω 'nin limiti olduğu tüm n doğal tam sayılarından daha büyüktür! Bu, Sayılar alanının içerdiği ordinalleri ne düzeyde doyurduğunu gösterir: Ordinallerden “çok daha fazla” Sayı vardır.

Ayrıca N'nin ω 'ye “sonsuzca yakın” olduğu da söylenebilir; en yoğun tam sayıların olabileceğinden de daha yakın. Bu “sonsuzca yakın” nosyonu devasa bir felsefi öneme sahiptir. Sayıların sınırsız krallığında yeni yollar sunan uzamlar açar. Bu yolları biraz ileride katedeceğiz.

16.23 *Diyadik rasyonel sayıların dizisi ve sonu.*

Elimizde, sonlu maddeli her Sayıyı bir diyadik rasyonel sayıyla eşleştiren bir $Ra(N)$ fonksiyonumuz var. Bu eşlemeye tam sayılar dahildir, zira Sayı olarak düşünülen pozitif n sayısına Ra fonksiyonuyla n defa $1+1+...+1$, yani tam olarak n sayısı tekabül edecektir, zira bir Sayı bir doğal tam sayıysa bu Sayının bütün alt-Sayıları o Sayının biçimindedir. Ra fonksiyonunun her sonlu maddeli Sayıyla ya –tam sayı bile olsa– bu Sayıyı ya da bir diyadik rasyonel sayıyı ilişkilendirdiğini söylemek doğru olacaktır.

Çalışmayı tamamlamak ve diyadik rasyonel sayıların Sayılarda “bizzat” temsil edildiği sonucuna varmak için:

- sonlu maddeli Sayıların sıra düzeninin, bunlara tekabül eden diyadik rasyonellerin geleneksel sıra düzeniyle izomorf olduğunu, yani Sayıların sıra düzeninde $N_1 < N_2$ ise rasyonellerin alışıldık sıra düzeninde $Ra(N_1) < Ra(N_2)$ olduğunu doğrulamak gerekir; çok eğlenceli olan bu matematiksel alıştırmanın nasıl yapılacağı notlarda¹⁸ özet olarak verilmiştir;

- *bütün* diyadik rasyonellerin sonlu maddeli Sayılara uygulanan Ra fonksiyonuyla elde edildiğini ispatlamak gerekir; bu, her pozitif diyadik rasyonel sayının belirli bir tam sayı (“üstten” tam sayı parçası) ve $\frac{1}{2^q}$ veya $-\frac{1}{2^q}$ türünde diyadik rasyonel sayıların cebirsel toplamı biçiminde gösterilebileceğini ispatlamaya denktir; zira bir kez böyle yapıldığında, değeri Ra için bu şekilde parçalara ayrılmış rasyonel sayı olan N Sayısı yeniden oluşturulabilir;¹⁹

- rasyonel sayıların işlemsel boyutlarının, yani toplama, çarpma, bölme, kısacası bir cismin cebirsel yapısını oluşturan şeyin Sayılarda tanımlandığı varsayılan ve sonlu maddeli Sayılara uygulanan aynı işlemlerle izo-

18 Sıralamaların izomorfizmi ilkesi, yani şayet N sonlu maddeli bir Sayıysa ve $Ra(N)=r$ ise $N_1 < N_2 \rightarrow RA(N_1) < RA(N_2)$ olması oldukça basittir ($<$ işaretinin Sayılarda sıralılık bağıntısında içermenin solunda ve rasyonel sayılarda normal sıralılık bağıntısının sağında olduğuna işaret edelim). Bunun sonucunda, N 'nin $1 + 1 + \dots - \frac{1}{2} + \dots$ şeklinde ayrıştırılmasında “sona” eklenenler hızla azalır. Bu, yaygın bir basit cebirsel hesaptır.

19 Bkz. Gonshor, *a.e.*, s. 30-31.

morf olduğunu ispatlamak gerekir; bu, bir istisna dışında 18. bölümdeki soruşturmalarla alakalıdır: *Negatif* diyadik rasyonel sayıları elde etmek için genel olarak negatife geçişi tanımlayan simetrikleştirme prosedürünü kullanacağız: yani biçimle atığın tersyüz edilmesini. Elbette her zaman sonlu maddeli bir Sayı elde edeceğimizi ileri süreceğiz (fakat 0 bu sefer atıkta olacak).

İşlerin ontolojik kısmıyla ilgili olarak amacımıza ulaştık. Varlığında düşünülen, Sayı olarak kaydolan bir diyadik rasyonel sayının çok basit bir içsel tanımı vardır: Maddesi sonludur.

Varlık bakımından bu, rasyonel sayılar ne kadar yoğun –iki ardışık tam sayı arasında sonsuzca oluşacak kadar yoğun– olursa olsun bunların yine de sonluya ait olmasını açıklar. Sonsuzun sayısal ontolojisi reel sayılarla başlar.

16.24 *Reel sayılar.*

Reel sayıların geometrik “süreklilik”in normunu sağladığını biliyoruz: Bunlar bir çizgi üzerindeki noktalarla temsil edilirler. Newton ve Leibniz sonrasında modern matematiksel düşüncenin şaheseri ve kilit taşı olan bütün analiz müessesine dayanak olan bu reel sayılardır.

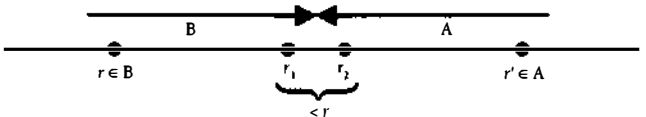
Uzun süre boyunca süreklilik ve buna tekabül eden fonksiyonlar ya geometrik inşalarda (Yunan ve klasik öncesi çağ) ya da ilkel ve pragmatik tarzda (17. ve 18. yüzyıllar) düşünülmüştü. Üzerinde hesaplama yapabileceğimiz kendilikler olarak reel sayılara dair titiz bir kavram 19. yüzyılda, Cauchy sonrasında orta-

ya çıkmıştır ve Dedekind belirleyici bir safhayı temsil etmektedir.

Sayılar alanında reel sayıların tanımına hükmeden inşa en yakın inşa olduğu için Dedekind'in icat ettiği haliyle "kesim" üzerinden reel sayıların inşasını kısaca hatırlatmak isteriz.

16.25 16.14'teki düşünceleri göz önünde bulundurarak burada genel olarak rasyonel sayıların yerine kullanabileceğimiz diyadik rasyonel sayılardan hareket edelim. B'nin her rasyonel sayısı H'nin her rasyonel sayısından daha küçük olacak şekilde B ve H diyadik rasyonel sayılar kümesini ele alalım. Ayrıca B'nin içsel maksimumu olmadığını da koyutlayacağız (kümenin her r_1 diyadik rasyonel sayısı için $r_1 < r_2$ olacak şekilde kümenin bir r_2 elemanı vardır); ek olarak H'nin içsel minimumu olmadığını da koyutlayacağız. Son olarak, B ile H arasında şu bağıntılar olduğunu varsayalım: Bir H diyadik rasyonel sayısına istediğimiz "kadar yakın" olan bir B diyadik rasyonel sayısı daima vardır. Başka bir deyişle r_2 H'nin bir diyadik rasyonel sayısıysa ve r istediğimiz kadar küçük bir diyadik rasyonel sayısıysa r_2 ile r_1 arasındaki fark r 'den küçük olacak şekilde B'nin daima bir r_1 diyadik rasyonel sayısı vardır.

Diyadik rasyonel sayıları bir doğru üzerindeki noktalarla işaretlersek durumu aşağıdaki gibi görselleştirebiliriz:



B'nin H'ye asla girmeden "arttığı" ve H'nin asla B'ye girmeden "azaldığı" ve iki kümenin birbirine "dokunmadan" istenildiği kadar yakın olduğu açıkça görülüyor.

Dedekind bir reel sayıyı tam da B ile H "arasında" yer alan nokta olarak *tanımlar*; yani burada *yaratılmış*, aynı anda B'nin her elemanından daha büyük ve H'nin her elemanından daha küçük olan eleman. Bu elemanı, B ile H'nin *kesim* noktası olarak tespit edeceğiz.

Bu yöntemin özelliği, kesimi verili bir evrende şeylerin bir durumu olarak değil (Sayılar için böyle ele alınmıştı, bkz. 15.6), bu prosedürden önce var olmayan bir matematiksel kendiliğe dair tanımlama prosedürü olarak ele almasıdır. Başlangıçta sadece rasyonel sayılar vardır. Kesim bir rasyonel sayı değilse (B'nin üst sınırı ile H'nin alt sınırı çakışırsa bir rasyonel sayı olabilir) rasyonel sayılar alanında var olmayan bir "varlık"ın adını veya sunum biçimini bizzat tayin eder. Öyleyse reel sayılar burada işlemsel üretimlerdir; varlık-olmaysından zuhur ederek B ile H'nin birbirine dokunduğu kurmaca noktayı, bu kurmacanın aralarına girmesiyle *gösterirler*. İstenildiği kadar birbirine yakın iki kümeyi ayıran minik boşluk dışında hiçbir şeyin olmadığı o yere, sayı olarak bir kesim *gerçekleştirerek* bu boşluğu dolduran reel sayı gelir.

- 16.26 Sayının ontolojik kavranışında kurmacalara yer yoktur. Klasik reel sayılar, yani diyadik rasyonel sayılarda kesim gerçekleştiren sayılar şayet Sayılar alanına kaydoluyorsa bunun nedeni reel sayıların bu alanda var olması ve belirli bir özellekle ayırt edilebilir olmasıdır.

Sırf bir gediğin *adları* olarak yokluktan zuhur edemezler. Sayılara dair ontolojik kavrayışta her Sayı *vardır*, hiçbir Sayı bir işlemin adında sonuçlanmaz veya çözümlenmez. Burada baskın nominalizme karşı mücadele ediyoruz ve bu mücadeleyi yaygın bir şekilde işlemsel bir kurmaca olarak kabul edilen sayının yerinde yapıyoruz.

16.27 Aslında reel sayıları Sayılar olarak tanımlamamız kolay anlaşılabilir bir şey:

Ya sonlu maddeye ya da ω maddesine sahipse ve biçimi gibi atığı da sonsuzsa bir Sayının reel sayı olduğu söylenir.

Şimdi söylenecekler gerçek sayıları Sayılar alanında “bizzat” temsil eden bu tanımlı meşrulaştırır.

16.28 Söz konusu tanımın kesimle reel sayılara dair kavrama “yansıtılması” temelinde çok basittir.

Bir Sayı sonlu maddeye sahipse, görmüş olduğumuz gibi, diydik bir rasyonel sayıdır.

Bir Sayı ω maddesine sahipse bu Sayının bütün alt-Sayıları ω 'den küçük maddeye, dolayısıyla sonlu maddeye sahiptir, çünkü ω sonsuz olan en küçük ordinaldir. Dolayısıyla bütün alt-Sayıları diydik rasyonel sayılardır. Özel olarak düşük ve yüksek kümesi diydik rasyonel sayılardan oluşan kümelerdir. Her Sayı düşük ve yüksek kümelerinin kesimi olduğu için ω maddeli bir Sayı, diydik rasyonel sayılardan oluşan iki kümenin kesimi olarak temsil edilebilir. Başka türlü söylersek, Sayı olarak düşünülen bir reel sayı, $Ba(N)/Ht(N)$

şeklindeki kanonik sunumu biricik bir şekilde diyadik rasyonel sayılarla gerçekleştirilen bir Sayıdır.

Son olarak ω maddeli bir Sayı sonsuz bir biçim ve atığa sahipse düşük ve yüksek kümelerinin içsel maksimumları olması durumunu savuşturabiliyoruz. Zira, N 'nin biçimi sonluysa tam sayılardan oluştuğu için (maddesi ω) p tam sayısı gibi bir en büyük elemana olanak verir. p noktasında N kesimi, açıkça N ile ayırtacı N 'nin biçiminde olan en büyük alt-Sayı olan N/p alt-Sayısını, dolayısıyla N 'nin düşük kümesinin en büyük alt-Sayısını tanımlar. Şayet atık sonluysa, N/p N 'nin yüksek kümesinin en küçük elemanı olacak şekilde bir p sayısı vardır. *A contrario*, N 'nin biçimi ve atığı sonsuzsa, yani içsel maksimum olmayan tam sayı dizileriye ne düşük kümesinin bir maksimum terimi ne de yüksek kümesinin bir minimum terimi vardır.

Dolayısıyla tam olarak Dedekind kesiminin koşullarındayızdır: maksimum ve minimumu olmayan diyadik rasyonel sayıların artan ve azalan ayrı kümeleri. Arada tek bir fark vardır; Dedekind'in bir kesimin boş noktasında kurmaca olarak tesis ettiği yerde biz "*reel sayıları*" *tikel, önceden var olan Sayılar olarak tanımlıyoruz*. Bize göre bir reel sayı, tam da (düşük ve yüksek kümeleri, dolayısıyla alt-Sayılardan oluşan kümeler olduğu ortaya çıkan) diyadik rasyonel sayılardan oluşan iki küme arasında yer alan minimum maddeli o biricik Sayıdır.

Reel sayıların Sayılar olarak tanımlanmasında her şeyin içkin olarak kaldığına işaret etmek özellikle rahatlatıcıdır. Dedekind kesimi iki rasyonel dizisinin dışındaki sayı kurmacasını söz konusu dizilerin temas

noktası olarak tayin eder. Bizdeyse diyadik rasyonel sayılardan oluşan kümeler *reel Sayının alt-Sayılarından* oluşur. Prosedürlerin bu şekilde içkinleştirilmesi, Sayının varlığını yakalayan ontolojik yolun tipik özelliğidir. Bir diyadik rasyonel sayı olmayan Bir Sayının bir reel sayı olup olmadığını öğrenmek için üç bileşenini incelemek yeterlidir:

- maddesi ω olmalıdır;
- biçimi sonsuz olmalıdır;
- atığı sonsuz olmalıdır.

Sonuca varmamıza olanak veren sadece bunlardır. *Daha sonra*, bu Sayının diyadik rasyonel sayılardan oluşan iki kümenin kesimi olduğunu ve dolayısıyla gerçekten de (klasik anlamda) bir reel sayı olduğunu ortaya koyabiliriz. Fakat burada bile Sayının dışına çıkmıyoruz, zira bu diyadik rasyonel sayılar Sayının alt-Sayılarıdır.

Sayıların uzamında kavranan geleneksel reel sayılar yaklaşımında düşüncenin varlığa içkinliği bir an için bile olsa kendisiyle çelişmez. Bir saf çokluk türünün tanımlanması, işlemsel kurmacaların yerine geçer. Reel sayılar burada tam sayılar veya rasyonel sayılardan daha gizemli değildir. Tek hususilikleri, Sayıları katedişimizin sonsuz maddeler öngördüğü ânı işaretlemesidir. Bu bakış açısından tam sayılar ve rasyonel sayılara kıyasla reel sayıların ontolojik tekilliği tek bir kelimeye dayanır: sonsuz. Her türlü konstrüktif karmaşıklıktan bağımsız olarak tek başına sonsuz, sadece sayısal kesmenin gerçekleştiği şey dikkate alındığında, reel Sayıların örnek niteliğindeki *modernliğini* açıklığa kavuşturur.

16.29 Böylelikle tikel türler olarak doğal tam sayıları, pozitif ve negatif tam sayıları, rasyonel, reel sayıları ve ordinalleri kapsayan bir Sayı kavramı elde ederiz.²⁰ Sayı kavramının birleştirilmesine dair modern sorunun üstesinden gelmiş oluruz (bkz. 1.8). Fakat bu esnada, söz konusu kavramın sayısallık alanındaki tarihsel çıkarımın tamamen kısıtlı kaldığı başka Sayıları da kapsadığını gördük. Rasyonel ve reel sayılar sonlu maddeli Sayıların tamamını ve ω maddeli Sayıların sadece bir kısmını içerir. Her şey sanki bizim düşüncemiz saf çokluklara mümkün sayısal erişim bakımından varlığın

20 Bu noktada Sayılarımızın, fizikte kullanımı önemli olan karmaşık sayılar ve dördey sayıların temsiline izin vermediğine söylenerek itiraz edilecektir.

Fakat karmaşık sayılar ve dördey sayılar sayı mıdır? Kanımca her türlü “doğrusallığı” terk ettiğimiz ve 1. boyuttan ayrıldığımız anda işimiz Sayılardan ziyade Sayılardan *hareketle* oluşturulan inşalarla olduğu mantıklı bir şekilde savunulabilir.

Temelde, karmaşık sayıların içsel özü geometriktir, bu “sayıların” hakikatini ortaya çıkaran, “karmaşık düzlem”dir. Karmaşık sayılar etrafında saf cebir (cisimlerin uzantısı) ile topolojik kavram olarak uzamın ontolojik şeması arasındaki derin bağ örgütlenir. Bu “sayıların” hem birleşimsel (bir karmaşık sayı, bir reel sayılar ikilisidir) hem de geometrik boyutu bundan kaynaklanır. Aslında bunlar *saymayan* sayılardır ve kavramsal bir “fiziğe” zaten çok yakın olan temsil ve kayıt şemaları sunarlar.

Ayrıca dikkate alman işlemsel alan bakımından böyle bir herhangi “sayının” bir başkasından daha büyük veya daha küçük olduğunu söylemek bile mümkün değilken “sayı”dan bahsetmek bana mantıksız geliyor. Kısacası, kanımca bir sayılar cismi, sıralı bir cisim olmalıdır; halbuki ne karmaşık sayılar ne de dördey sayılar öyledir.

Son olarak, varlığın bir biçimi olarak düşünüldüğü ölçüde Sayı kavramını, bir doğruya dair sezgiye göre kullanılabilen sayılarla kısıtlayacağım. Bu, Sayının varlığına dair tanımda ordinallerin oluşturduğu temel “varlık doğrusu”nun oynadığı belirleyici rolle açık hale getirilmiştir.

savurganlığının sadece başlangıçtaki küçük bir kısmını aydınlığa kavuşturmuş gibidir. Sayı düşüncesinin geleceği sınırsızdır.

16.30 Sonsuz küçüklükler.

16.22'de hem ω 'den küçük hem de limiti ω olan bütün sonlu ordinallerden büyük bir N Sayısı bulmanın mümkün olduğuna işaret etmiştik. Bu Sayının ω 'ye "sonsuzca yakın" olduğu söylenebilir ve bizi sonsuz küçük Sayı kavramına yönlendirir.

17. ve 18. yüzyıl matematikçileri tarafından serbestçe kullanılan sonsuz küçük Sayı fikri 19. yüzyılda aşikâr tutarsızlıkları nedeniyle kapı dışarı edilmişti. Yerini limit (Cauchy) ve kesim (Dedekind) kavramlarına bıraktı. 35 yıl önce saf modeller mantığının oldukça yapay ama tutarlı çerçevesinde tekrar ortaya çıktı: Robinson'un standart-dışı analizi.²¹ Sayılar alanında "sonsuz küçükler" en doğal şekilde bolca bulunur. Sayıların büyümlü krallığında bu minik yolculuğu sonsuz küçüklerle tamamlayacağız.

16.31 Maddesi ω olan ve boşluğun tekliği olan biçiminde tek eleman olarak boşluk olan $i = (\omega, (0))$ Sayısını düşünelim. Biçiminde 0 olduğu için pozitif bir Sayıdır bu.

Gelgelelim maddesi reel Sayıların maddesiyle aynı olan bu pozitif Sayı, *tüm pozitif reel Sayılardan daha küçüktür.*

Gerçekten de, bir reel sayı pozitifse, i Sayısında olduğu gibi, biçiminde 0 olur: 0, i ile pozitif bir reel sa-

21 Bkz. A. Robinson, *Non-standard analysis, a.g.e.*

yıyı ayırmaz. 0 dışındaki tüm tam sayılar i 'nin atığında olduğu için, i ile bir R reel Sayısının ayırtacı, R 'nin biçiminde yer alan 0'dan farklı ilk tam sayı olacaktır. Reel sayıların tanımı R 'nin biçiminin sonsuz olmasını gerektirdiği için bu ayırtacın var olması zorunludur. Ayırtaç i 'nin atığında olduğu için i , R 'den daha küçüktür. Öyleyse her reel Sayı için $0 < i < R$ olacak şekilde bir i Sayısı vardır. i , Sıfır ile Sayı olarak düşünülen tüm reel sayılar “arasında” yer alır. Bu sayının reel sayılar için sonsuz küçük olduğunu söyleyebiliriz.

16.32 Bu tanımı genelleştirelim.

İstediğimiz kadar Sıfıra yakın alman her r pozitif diyadik rasyonel sayısı için, Sıfır ile r arasında yer alan kümenin bir N_1 Sayısı varsa, hepsi aynı maddeye sahip bir pozitif Sayılar kümesinin rasyonel olarak Sıfıra yöneldiğini söyleyebiliriz. Başka bir deyişle her r diyadik rasyonel sayısı için $0 < N_1 < r$ olacak şekilde N_1 vardır. Klasik “yönelme” nosyonunun burada diyadik rasyonel sayılara bağlı hale getirildiğini görüyoruz. Sayıların sınırsız alanında hangi ölçüm ölçeğinin kullanıldığını belirtmek gerekir, zira göreceğimiz gibi daha ince bir ölçek bulmak *daima* mümkündür.

Pozitif reel Sayılar kümesinin rasyonel olarak Sıfıra yöneldiği aşikârdır. Rasyonel olarak Sıfıra yönelen başka Sayı kümeleri de bulunabilir: örneğin maddesi $S(\omega)$ olan ve biçimi en azından 0'ı içeren $(S(\omega), (0, \dots))$ türü pozitif Sayılar.

O halde şöyle ileri sürebiliriz:

Bir Sayı,

- kümenin Sayılarıyla aynı maddeye sahipse;

- pozitifse;

- kümenin tüm Sayılarından daha küçükse;

rasyonel olarak Sıfıra yönelen bir Sayılar kümesi için bir sonsuz küçüklüktür.

Reel Sayılar kümesi için $(\omega, (0))$ Sayısı bu nedenle bir sonsuz küçüklüktür. Tersine, $(S(\omega), (0, \dots))$ Sayılar kümesi için sonsuz küçüklük yoktur, zira bu küme $S(\omega)$ maddeli en küçük pozitif Sayı olan $(S(\omega), (0))$ Sayısını içerir.

Sonsuz küçük kavramını Sıfıra yönelen kümenin Sayılarıyla aynı maddeye sahip Sayılarla kısıtlama zorunluluğunun nedeni, böyle bir kısıtlama olmadığında *istenildiği kadar sonsuz küçüklük* olmasıdır. Bunun için maddeyi artırmak yeterlidir: $(S(\omega), (0))$ Sayısı pozitifdir ve maddesi ω olan her pozitif Sayıdan kesinlikle daha küçüktür. Özel olarak $i = (\omega, (0))$ 'dan küçüktür, zira ayırtaç i 'nin maddesinin dışında ve $(S(\omega), (0))$ 'nin atığında olan ω 'dır. Sonsuz küçüklük kavramımızın ne düzeyde göreceli olduğunu görüyoruz: Sayıların sıra düzeninin yoğunluğu, bir pozitif Sayı “göreceli” olarak ne kadar küçük olursa olsun yine de Sıfır ile bu Sayı arasında yer alan Sayılardan oluşan tutarsız bir çokluk olmasını sağlar.

İstersek klasik tanımı muhafaza edebiliriz: Tüm pozitif reel sayılardan daha küçük olan her pozitif Sayı sonsuz küçüktür. Fakat bu durumda sonsuz küçüklüklerin kontrolsüz bir şekilde dolup taşıdığını görürüz. Sıfırın “civarı”, Sayıların tam sayı alanı “kadar çok” Sayı içerir. Bunun nedeni, olduğu haliyle çoklu-varlığın tutarsız olduğu noktada, “kadar çok” nosyonunun her türlü anlamı yitirmesidir.

16.33 Kesimlerin kesimleri.

Maddesi ω olan ve biçimi 0 ve 1 tam sayılarıyla sınırlanan $C = (\omega, (0,1))$ Sayısını ele alalım. Bu Sayı bir reel sayı değildir, çünkü biçimi sonludur. Pozitifdir, çünkü 0 biçimindedir. Maddesinin ait olduğu reel sayılarda bu Sayının yerini nasıl tespit edebiliriz?

1'in biçimde olmadığı bir pozitif reel sayı kesinlikle C 'den küçüktür. Böyle bir reel sayının atığında ve C 'nin biçiminde olan 1 ayırtaçtır.

Biçiminde 1 olan pozitif bir reel sayı kesinlikle C 'den büyüktür. 1'den büyük tüm tam sayılar C 'nin atığındadır, ama bir reel sayının biçiminde olanlar vardır, çünkü bu biçim sonsuzdur. Ayırtaç, reel sayının biçiminde olan 1'den büyük en küçük tam sayı olacaktır ve atıkta olduğu için C daha küçük olacaktır.

Dolayısıyla C tam olarak atığında 1 olan reel sayılarla biçiminde 1 olan reel sayılar arasında yer alır. Bu iki sınıf bütün reel sayıları ikiye böler ve bu, sıralı olan bir bölmedir (atığında 1 olan tüm pozitif reel sayılar, biçiminde 1 olan bütün pozitif reel sayılardan küçüktür). Dolayısıyla ayrık iki reel sayılar sınıfı "arasında", reel sayıların bölümlenmesinin durağında bir Sayı yerleştirmek tamamen mümkündür. Ayrıca reel sayıların kendileri de rasyonel sayılar üzerinde bir kesim oldukları için C Sayısı bir kesimler kesimi olacaktır.

Genel olarak "aynı türde", yani şu veya bu özelliğe sahip (reel sayıları tanımlarken görmüş olduğumuz gibi) kesimler veya kanonik sunumlarla tanımlanmış bir Sayılar kümesinin sıralı bir ikiye bölünmesi verildiğinde, her alt parçadan daha büyük ve her üst parçadan daha küçük olan, bir bölümlenmenin durağında yer alan

minimum maddeli bir Sayı “kesimlerin kesimi” olarak adlandırılacaktır. $(\omega, (0,1))$ Sayısı, sayısal “pozitif reel Sayılar” uzamında bir kesimler kesimidir.

Kesimlerin kesimlerinin varlığı bir kez daha, ne kadar kaynaştırıcı görünürse görünsün Sayıların ardışıklığın aşırı yoğun dokusunu *bir noktada* kesmekteki sonsuz kapasitesinin kanıtıdır.

16.34 Teftiş edip kısıtlanması gereken daha nice Sayı var! Fakat bundan keyif alan eserler ortaya çıkmaya başlıyor. Filozoflar haddi zatında meraklı değildir. İzledikleri yol kendi ilgileriyle belirlenir. Varlığında düşünülen her sayının bir Sayı olduğuna kani halde krallıktan ayrılmadan önce hesaplamaya veya daha ziyade hesaplamanın varlığına geri dönmeleri gerekir. Zira filozoflar hesap uzmanları da değildir. Fakat ruhumuzu ören bu sayıları, işlemsel mekanizmasının türetimine varıncaya dek Varlığın kadim ve hükümsüz şeffaflığına iade etmek isterler.

4

İşlemsel Boyutlar

17. Doğal bir ara

17.1 Ordinaler (ve kardinaler) alanı düşünce için aşırı bir *cazibeye* sahiptir. İleri sürdüğüm şeyin duyguyla, hatta duygulanımla bir kanıtı, uzun uzadıya düşünüldüğünde bu cazibenin Doğanın cazibesi olduğudur: bir çeşitlilik bolluğu ve aynı zamanda sessiz bir monotonluk. Hiçbir şey aynı değildir, her şey sonsuza gider, fakat bu sayısız çokluk ve biçimin, birbirine dolanmış bu seslerin özdeş olanın durağanlığını savurganca dağıtmasına neden olan temel bir nota, inatçı bir bas sesi duyulur. Şayet şairlerin metaforları referans olarak gökle ağaç, çiçekle deniz, göletle kuşu alıyorsa bunun nedeni, doğanın sınırsız görünümünün perdelediği ve takdim ettiği Aynının bu mevcudiyetini *söylemek* istemeleridir. Aynı şekilde sonsuz sayısının sonsuzluğunda, Bütünü'nün tutarsızlığında daima tekil olan ordinaler de saf varlıklarında düşünceye kendilerini sunduğu haliyle doğal çoklukların geçişli istikrarı ve içsel homojenliğini tekrarlarlar. Tek tek ve bir “küme” olarak ordinaler üzerine tefekkürün entelektüel güzelliğinden kopmak güçtür. Her tam sayıyı şahsi dostu olarak gören büyük Hintli matematikçi Ramanujan¹ aklıma geliyor. Rama-

1 Ramanujan'ın matematiksel şahsiyeti hakkında büyük sayı teorisyeni G. H. Hardy'nin otobiyografik kitabına başvurabilirsiniz; *A Mathematician's Apology*, Cambridge, Cambridge University Press, 1940.

nujan Sayının bu şiirini haizdi; ve doğanın Şiiri onun dildeki simetriğidir. İspatlamayı değil, ordinal sahasının hayalperesti olarak orada meslektaşlarının şaşkınlıkla karşıladığı teşhis eğrileri çizmeyi severdi. Kelimenin her anlamıyla uzaktan gelen Ramanujan bizim katı modern ayrımlarımıza alışkın değildi. Sayıları doğrudan olduğu haliyle görüyordu: yani varlığın, çoklu kaynağını ve titiz özdeşliğini, şair için duyarlılığın “eş-duyumları”nı² düzenleyen jestin aynısıyla savurganca kullandığı doğal hazineler olarak.

17.2 Elimizde Sayıya dair bir kavram var ve bu kavramın geleneksel sayılarımızı kapsadığını biliyoruz. Tam sayılar, rasyonel sayılar, reel sayılar, ordinaller çoklu-varlıklarında düşünüldüğünde Sayılardır. Şimdi bu kavramın geleneksel sayılarımızı sadece varlıklarında değil, aynı zamanda işlemler açısından da içerdiğini ispatlamamız gerekiyor; pek çekici olmayan bir iş. Hesaplamamız yönlendirdiği zihniyetten ne kadar uzak olursak olalım Sayılarla hesap yapılabildiğini ve bu hesaplamaların Sayının klasik türleri için olağan hesaplamalarla çakıştığını da ispatlamamız zorunlu. Cebiri, toplamayı, çarpmayı, vs. ele almamız lazım. Aksi takdirde sadece varlık açısından konuşurken bu Sayıların sayılar olduğunu söylediğimizde bize kim inanır?

17.3 “İşlem” veya hesaplama demek, üzerinde tek tek değil, en az ikili olarak çalıştığımız “nesneler”i düşünüyoruz demektir: x ile y ’nin toplamı, x ’in y ’ye bölümü,

2 Baudelaire’in şiirine bir gönderme.—çn

vs. Sayının maddesi ordinallerle örüldüğü için ordinal çiftlerini ele almamız, düşünmemiz gerekir. Bu da doğal çoklukların büyüğü alanında biraz daha kalmamızı sağlar. Tüm bu ara, ordinal çiftleri, iki iki alman ordinaler üzerine birkaç düşünce ve önermeye vakfedilmiştir. Ayrıca göreceğimiz gibi bu ikililer de tamamen doğaldır: Bunları, kendisi de büyük bir cazibeye sahip bir prosedürle “basit” ordinallere bağlayabiliriz.

17.4 Ordinallerin sıralı çiftlerinden bahsedeceğiz ve bunları $\langle W_1, W_2 \rangle$ ile göstereceğiz. “Sıralı” tabiri, çift içindeki terimlerin sırasının dikkate alınacağı anlamına gelir: Böylelikle, (e_1, e_2) ile gösterilen (bkz. 7.7) ve sıralarını dikkate almaksızın iki terimin sadece “kümeleştirilmesi” olan basit çiftimize dair kavramımızda olandan farklı olarak, birinci terim olan W_1 ve ikinci terim olan W_2 ’den bahsedeceğiz. Başka şekilde söylersek: W_1 ve W_2 farklı ise $\langle W_1, W_2 \rangle$ sıralı çifti, $\langle W_2, W_1 \rangle$ sıralı çiftiyile aynı değildir. Basit çifti, sıralı çiftten daha iyi ayırt etmek için ikincisini ikili olarak adlandıracağız.

$\langle W_1, W_1 \rangle$ türü “ikililer” de mümkündür. Bu durumda W_1 hem birinci hem de ikinci yerde yer alır.

Sıralı çift veya ikili kavramı matematikte belirleyici bir rol oynar: Bağıntılar ve fonksiyonlar düşüncesinin tamamına dayanak olan odur.³ Bir saf çokluk figürüne indirgenebilir ve böylelikle bağıntılar ve fonksiyonların çoklukla ilişkili olarak herhangi bir *ek* varlığı gönder-

3 Küme teorisinin bağıntılar ve fonksiyonları saf çokluğa indirgemesi ve bu hususta ontolojik bir tartışma için, bkz. A. Badiou, *L'Être et l'Événement*, a.g.e., Ek 2, “Une relation, ou une fonction, n'est qu'un multiple pur”, s. 483-486.

me yapmadığını, bağlantılı nesnelerle bunları birbirine bağlayan bağ arasında hiçbir ontolojik ayrım olmadığını gösterir. Fakat burada söz konusu kavramı naif aşikârlığı içinde ele alıyoruz.

- 17.5 Bir $\langle W_1, W_2 \rangle$ ikilisinin maksimum ordinalini $\text{Max}(\langle W_1, W_2 \rangle)$ ile göstereceğiz: W_1 ve W_2 farklıysa, $\text{Max}(\langle W_1, W_2 \rangle)$ bu iki ordinalden daha büyük olanıdır ve ikili $\langle W_1, W_1 \rangle$ türündeyse $\text{Max}(\langle W_1, W_2 \rangle)$ W_1 ordinalidir. Ordinallerin ait olma bağıntısıyla tamamen sıralı olduğunu hatırlatmalıyım (bkz. 8.10): W_1 ve W_2 farklıysa biri diğerinden kesinlikle küçüktür (biri diğerine aittir).

Bu tamamen temel olan bir ikilinin maksimum terimi nosyonu daha sonra önemli bir rol oynayacak. Dolayısıyla iyice kavranması bir hayli mühim.

- 17.6 $\langle W_1, W_2 \rangle$, C_1 ile göstereceğimiz bir ordinaler ikilisi ve $\langle W_3, W_4 \rangle$, C_2 ile göstereceğimiz bir başka ikili olsun. Bu ikililer üzerinde bir sıra bağıntısını şu şekilde tanımlayacağız: Aşağıdaki üç koşuldan biri karşılandığında C_1 'in C_2 'den daha küçük olduğunu söyleyeceğiz ve bunu $C_1 < C_2$ ile göstereceğiz:

1) C_2 ikilisinin maksimum ordinali C_1 ikilisinin maksimum ordinalinden daha büyük. Başka bir deyişle: $\text{Max}(C_1) \in \text{Max}(C_2)$ ise $C_1 < C_2$.

2) C_1 ikilisinin maksimum ordinali C_2 ikilisinin maksimum ordinaline eşit, fakat C_1 ikilisinin birinci terimi C_2 ikilisinin birinci teriminden daha küçük. Başka bir deyişle, $\text{Max}(C_1) = \text{Max}(C_2)$ olduğu durumda $W_1 \in W_3$ ise $C_1 < C_2$ olur.

3) C_1 ikilisinin maksimum ordinali, C_2 ikilisinin maksimum ordinaline ve C_1 ikilisinin birinci terimi C_2 ikilisinin birinci terimine eşittir, fakat C_1 ikilisinin ikinci terimi C_2 ikilisinin ikinci teriminden daha küçüktür. Başka bir deyişle $\text{Max}(C_1) = \text{Max}(C_2)$ ve $W_1 = W_3$ olduğu durumda $W_2 \in W_4$ ise $C_1 < C_2$ olur.

Bu üç koşuldan hiçbirisi gerçekleşmezse bunun nede-ninin C_1 ile C_2 'nin özdeş olması olduğu açıktır: İkisinin de birinci terimi ve ikinci terimi aynıdır. *A contrario*, iki ordinal ikilisi farklıysa ya birincisi diğerinden daha küçüktür ya da diğeri birincisinden daha küçüktür: Ba-ğıntı tamdır.

Bu sıra doğrudan $\text{Max}(C)$ işlemcisi dikkate alınarak yapılır: Fakat işlemci sadece özdeşlik veriyorsa sırasıyla önce her ikilinin birinci teriminin, sonra –şayet bu kıyaslama da sadece özdeşlik veriyorsa– her ikilinin ikinci ordinalinin kıyaslanarak incelenmesiyle gerçekleştirebilir. Maksimum birinci terime baskındır ve birinci terim de ikinci terime baskındır. Birkaç örnek verelim:

- $\langle 6, 0 \rangle$, $\langle 7, 0 \rangle$ 'dan daha küçüktür, çünkü birincisi-nin maksimumu olan 6, ikincisinin maksimumu olan 7'den daha küçüktür.

- $\langle 0, \omega \rangle$, $\langle 1, \omega \rangle$ 'den küçüktür, çünkü her ikisinin maksimumu eşit olduğu için (bu, ω 'dır), birincisinin ilk terimi olan 0, ikincisinin ilk terimi olan 1'den daha küçüktür.

- $\langle S(\omega), \omega \rangle$, $\langle S(\omega), S(\omega) \rangle$ 'den küçüktür, çünkü mak-simumları (ω 'nin ardılı olan $S(\omega)$ 'dir) ve birinci terim-leri eşit ($S(\omega)$ 'dir) olduğu için, birincisinin ikinci teri-mi olan ω , ikincisinin ikinci terimi olan $S(\omega)$ 'den daha küçüktür.

$\langle 0,0 \rangle$ ikilisinin tüm ikililerden küçük olduğu fark edilecektir: zira maksimumu, birinci ve ikinci terimi 0'dır ve 0 en küçük ordinaldir.

Ayrıca ikililerin tutarsız bir çokluk oluşturduğu da açıktır, zira ordinaller bir küme oluşturmazlar. İkili'ler, ama bunun yanı sıra ordinal'ler veya Sayı'lardan bahse-derken daima bu çoğul ekinin işaret ettiği bu şeye hiç- bir özellik atfedemediğimizi akılda tutmak gerekiyor: Burada düşünülebilir veya sunulmuş bir bütünlük söz konusu değildir. Özel olarak, biraz önce tanımladığımız sıra için minimum bir ikili varsa ($\langle 0,0 \rangle$ çifti), bu sıralılık için kesinlikle maksimum ikili yoktur.

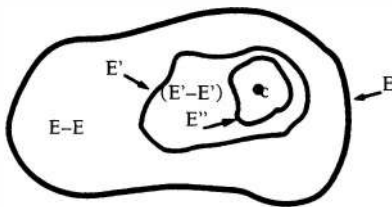
- 17.7 Tanımlamış olduğumuz ikililer arasındaki bağıntının gerçekten bir sıralılık bağıntısı (dolayısıyla geçişli: $C_1 < C_2$ ve $C_2 < C_3$ ise $C_1 < C_3$) olduğunu göstermeyi okura bırakıyorum.

Çok daha ilginç olanı burada iyi sıralı bir bağıntı- nın söz konusu olmasıdır. İyi sıralılığın tanımını 6.4'te vermiştim: Bir $<$ bağıntısıyla sıralanmış terimlerden oluşan herhangi bir küme verildiğinde bu kümenin sı- ralılık bağıntısı için *minimal* olan bir (ve sadece bir) elemanı vardır ve bu eleman söz konusu kümenin en küçük elemanıdır.

E, ordinal ikililerinden oluşan herhangi bir (boş olmayan) küme, dolayısıyla tüm elemanları ordinal ikilileri olan bir küme olsun. E'nin, *maksimumu E'de minimal olan* tüm ikili elemanlarını düşünelim. Başka bir deyişle $\text{Max}(C)$, bir ikilinin maksimumu sıfatıyla E'nin elemanları arasında yer alan en küçük ordinal olacak şekilde $C \in E$ olan tüm ikilileri düşünelim. Bu, ordinallerin özelliği olan minimallik ilkesi sayesinde

de mümkündür (bkz. 8.10). “E’ye ait bir C ikilisinde maksimum ordinal olma” özelliği düşünülduğünde bu özelliği doğrulayan bir en küçük ordinal vardır. Böylelikle E’nin, tüm C elemanları aynı minimal maksimumuma sahip bir E’ alt-kümesini elde ederiz. İkililer üzerinde sıralılığı tanımlayan birinci koşul nedeniyle E’ alt-kümesinin *bütün* elemanlarının, geri kalan veya (varsa) E – E’ içinde yer alan *bütün* elemanlardan daha küçük olduğu fark edilecektir.

Şimdi E’ alt-kümesinde, birinci terimi E’ alt-kümesinde minimal olan ikililer kümesini düşünelim. Başka bir deyişle E’ alt-kümesindeki ikililerin tüm birinci terimleri arasında W_1 en küçük olacak şekilde, tüm $C = \langle W_1, W_2 \rangle$ ikilileri. Bu kümeyi de aynı nedenle ele almak mümkündür: “E’ alt-kümesinin bir ikilisinde birinci terim sıfatıyla yer alan bir ordinal olma” özelliğini düşünmek ve bu özellik için minimal ordinali almak bunun için yeterlidir. Böylelikle aynı maksimumuma (çünkü E’ alt-kümesindedirler) ve aynı ilk terime (E’ alt-kümesinde minimal) sahip ikililerden oluşan bir E” kümesi elde ederiz. İkililer üzerinde sıralılığı tanımlayan ikinci koşulu dikkate aldığımızda E” kümesinin *bütün* elemanlarının E” kümesinin geri kalanında ya da (kendisi de E – E’ kümesinin elemanlarından küçük olan) E’ – E” kümesinde yer alan *bütün* elemanlarından küçük olduğu fark edilecektir.



Her bir çemberdeki ikililerin dış halkalardan küçük olduğu eşmerkezli bir tür iç içe geçme ortaya çıkar.

Son olarak E'' kümesinde " E'' kümesinin bir ikilisinde ikinci konumda yer alan bir ordinal olma" özelliğini düşünelim. Bu özellik için minimal bir ordinal vardır. Fakat bu kez elde edilen küme *tek bir* ikiliden oluşur. Zira E'' kümesinde ikililerin birinci terimi sabitlenmiştir (E' kümesinin ikilileri için minimal olan birinci terimdir). İkinci terim (bu yer için minimal olarak) sabitlendiğinde bir ikili tamamen belirlenmiş olur. Bu ikili, ikililer üzerinde sıralılığı tanımlayan üçüncü koşul gereği E'' kümesindeki diğer ikililer arasında en küçük olanıdır. Gelgelelim bu diğerleri de $E' - E''$ kümesinin ikililerinden küçüktür ve bunlar da $E - E'$ kümesinin ikililerinden küçüktür. Dolayısıyla E'' kümesinde elde edilen minimal ikili aslında E kümesinde minimaldır ve bu da bizim ispatlamaya çalıştığımız şeydi.

Ordinal ikililerinin sırası için bu minimallik özelliği bize üç temel özgürlük verir:

1) Bir C ikilisi verildiğinde, tanımladığımız sıralılıkta tam ondan sonra gelen biricik ikiliyi tayin etmek mümkündür. Bunun için, C 'yi içeren uygun bir kümede ondan büyük olanlardan oluşan alt-kümeyle dikkate almak yeterlidir. Bu alt-kümeye C 'den daha büyük olanlar arasında en küçük olan minimal bir eleman, yani C 'nin "ardılı" bulunur.

2) İkililerin bir özelliği bir küme tanımlıyorsa (bu özelliğe sahip ikililerden oluşan küme) hiç çekinmeden bu kümenin en küçük ikilisinden, dolayısıyla bu özelliğe sahip en küçük ikiliden bahsedebiliriz.

3) İkililerden oluşan bir küme verildiğinde, tıpkı ordinal kümelerinde yaptığımız gibi (bkz. 12.16) bu kümenin üst sınırından bahsedilebilir: Kümenin bütün ikililerinden daha büyük olan en küçük ikiliyi düşünmek yeterlidir.

“İyi sıralılık”, düşüncenin içsel minimallik ile dışsal maksimallik arasında hareket etmesine olanak verir: belirli bir kümenin en küçüğü ile söz konusu kümenin tüm elemanlarından daha büyük olan (dışarıdaki) ilk eleman. Buradaki tuzak böylelikle içsel maksimallığe erişimin açıldığını sanmaktır. Halbuki durum kesinlikle böyle değildir, zira ordinaller için olduğu gibi ikililer için de limite gelen, içsel olarak maksimalleştirilemez.

17.8 Ardışıklıktan, limitten bahsediyoruz. 9. bölümdeki tartışmalara geri döndüğümüz söylenebilir. Bunun nedeni ordinaller ile ordinal çiftleri arasındaki yakınlığın örtük saikimiz olmasıdır.

17.9 Bir örnekle başlayalım. W_1 'in 0'dan farklı herhangi bir ordinal ve $S(W_2)$ 'nin herhangi bir W_2 ordinalinin ardılı olduğu $\langle W_1, S(W_2) \rangle$ türündeki bir çift hakkında ne söylenebilir? Her şey, bu ikilideki maksimum ordinalle bağlıdır. W_1 'in maksimum, dolayısıyla $S(W_2) \in W_1$ olduğunu varsayalım. Bu ikiliyi, maksimum ordinali W_1 olan diğer ikililerle kıyaslarsak aşağıdakiler fark edilecektir:

- bu ikili, W_1 'in sadece ikinci konumda yer aldığı ikililerin hepsinden daha büyüktür (bkz. birinci konumun baskınlığı, ikililer üzerindeki sıralılığın 2. koşulu);

- bu ikili, ikinci konumda $S(W_2)$ 'den daha küçük bir ordinal bulunan tüm ikililerden daha büyüktür (sıralılığın üçüncü koşulu); bilhassa $\langle W_1, W_2 \rangle$ ikilisinden daha büyüktür;

- bu ikili, ikinci konumda $S(W_2)$ 'den daha büyük bir ordinal bulunan tüm ikililerden küçüktür. $S(S(W_2))$ 'nin W_1 'den küçük olduğu, yani W_1 'in maksimum konumunu değiştirmedeği varsayıldığında özellikle $\langle W_1, S(S(W_2)) \rangle$ ikilisinden daha küçüktür. Fakat bu hipotezi kabul edelim.

Bu durumda kabul ettiğimiz hipotezler gereğince $\langle W_1, S(W_2) \rangle$ ikilisinin $\langle W_1, W_2 \rangle$ ikilisi ile $\langle W_1, S(S(W_2)) \rangle$ ikilisi arasına girdiği açıkça görülür. Özel olarak ikilinin, bu iki ikiliden birincisinin *ardılı* olduğunu söyleyeceğiz.

Tersine, L 'nin limit olduğu ve W_1 'in ikilide maksimum olduğunu varsaydığımız $\langle W_1, L \rangle$ ikilisi ele alınırsa bu ikilinin ardılı olduğu bir ikili belirleyemeyiz. Kuşkusuz bu ikili, W_2 'nin L 'den küçük olduğu $\langle W_1, W_2 \rangle$ türündeki *tüm* ikililerden büyüktür (sıralılığın üçüncü koşulu). Fakat limit ordinal olan L söz konusu W_2 'lerin hiçbirinin ardılı değildir. Dolayısıyla tek bir olasılık vardır: $\langle W_1, L \rangle$ ikilisi, $W_2 \in L$ olmak üzere ve elbette W_1 maksimalse, yani L 'den büyükse, $\langle W_1, W_2 \rangle$ ikililerinden oluşan kümenin üst sınırıdır (bkz. N6). Ayrıca $\langle W_1, L \rangle$ ikilisinin, W_2 L 'den küçük olmak üzere $\langle W_1, W_2 \rangle$ ikililerinin limiti olduğunu da söyleyeceğiz.

Son olarak $\langle 0, S(W_2) \rangle$ ikilisini ele alalım. Bu ikilinin maksimumunun $S(W_2)$ olduğu açıktır. Fakat bu maksimuma sahip olan ikililer arasında *en küçük* ikili olduğu kesindir. Birinci terimi minimal (0'dır) olduğu için

$\text{Max}(C)=S(W_2)$ olan ve ilk terimi 0'dan farklı olan her C ikilisi, yani örneğimizdekinden farklı olan bu türdeki her ikili ondan büyüktür.

Maksimumu $S(W_2)$ olan en küçük ikili olan ikilimiz, maksimumu ondan hemen daha küçük olan – eğer varsa– “en büyük ikili”nin ardılı olmalıdır. “Daha büyük” ve “hemen daha küçük” nosyonlarının limit ordinallerin araya girmesiyle işe yaramayabileceğine dikkat edin. Yine de bizim örneğimizde durum böyle değildir: İkilimizin maksimumu $S(W_2)$ olduğu için ondan hemen küçük olan maksimum vardır ve W_2 'dir. Maksimumu W_2 olan en büyük ikili ne olabilir? Elbette birinci terimi maksimal olan ikilidir (sıralılığın 2. koşulu). Fakat *maksimumu W_2 olan bir ikilinin* birinci terimi W_2 'ye eşit olduğunda maksimumuna ulaşır. Zira W_2 'yi geçecek olursa maksimum değişir. Böylelikle ikililerin sırasında $\langle 0, S(W_2) \rangle$ 'den hemen önce gelen ikili $\langle W_2, W_2 \rangle$ 'dir. Ayrıca $\langle 0, S(W_2) \rangle$ 'nin, $\langle W_2, W_2 \rangle$ 'nin ardıl ikilisi olduğunu da söyleyeceğiz.

17.10 Ordinaller için yapmış olduğumuz gibi ordinal ikililerini de “ontolojikleştirmek” istiyoruz: Ardıl ikililere ve limit ikililere dair içsel olan ve sadece sıralılığa bağlı olmayan bir nitelendirme bulmak. Önceki paragrafta verdiğimiz örnekler bize kılavuz olacak.

17.11 0'ın yer aldığı ikililerle başlayalım.

0'dan farklı W_1 için $\langle 0, W_1 \rangle$ şeklindeki ikililerin, maksimumu W_1 olanlar arasında en küçük ikililer olduğuna işaret etmiştik. Bu söz konusu ikilileri içkin olarak tanımlamamıza olanak verir:

- $\langle 0, S(W_1) \rangle$ şeklindeki bir ikili daima ardıldır ($\langle W_1, W_1 \rangle$ 'in ardılıdır). $\langle 0, 1 \rangle$ ikilisi bu şekilde ardıldır ($\langle 0, 0 \rangle$ minimal ikilisinin ardılıdır).

- $\langle 0, L \rangle$ şeklindeki bir ikili her zaman limittir. W_1 ve W_2 'nin L limit ordinalini katettiği $\langle W_1, W_2 \rangle$ ikililer dizisinin üst sınırıdır. $\langle 0, \omega \rangle$ ikilisi, m ve n 'nin sonlu ordinaller (dolayısıyla doğal tam sayılar, bkz. 11. bölüm) olduğu tüm $\langle m, n \rangle$ ikililerinin limitidir.

$\langle W_1, 0 \rangle$ şeklindeki ikililer ayrıca içsel nitelendirmeleri açısından W_1 ordinalinin doğasına doğrudan bağlıdır:

- $\langle S(W_1), 0 \rangle$ şeklindeki bir ikili, *birinci konumda* maksimum olarak $S(W_1)$ olan ikililer arasında en küçük olanıdır. *İkinci konumda* maksimum olarak $S(W_1)$ olan, yani W_2 , $S(W_1)$ 'den küçük olmak üzere $\langle W_2, S(W_1) \rangle$ türü ikililer arasında en büyük olanıdır. Bu ikililerin en büyüğünden ($S(W_1)$ 'in ikinci konumda maksimum değerini korumasını sağlayan en büyük birinci terime sahiptir) hemen sonra gelir. Bu en büyük birinci terim, $S(W_1)$ 'in önceli olan W_1 'dir. $\langle S(W_1), 0 \rangle$ 'den önce gelen ikililerin en büyüğü böylelikle $\langle W_1, S(W_1) \rangle$ 'dir. Şu sonuca varabiliriz: $\langle S(W_1), 0 \rangle$ türündeki her ikili ardıldır. Böylelikle $\langle 1, 0 \rangle$ ikilisi ardıldır ($\langle 0, 1 \rangle$ 'in ardılıdır).

- $\langle L, 0 \rangle$ türündeki bir ikili, W_1 'in L 'den küçük olduğu $\langle W_1, L \rangle$ türü ikililerin hepsinden daha büyüktür. Fakat diğerlerinden daha büyük olan böyle bir ikili yoktur, zira diğerlerine göre L limit ordinaline "daha yakın" olan bir W_1 yoktur (bkz. 9.18). Ayrıca $\langle L, 0 \rangle$, 0 'dan farklı W_1 'ler için $\langle L, W_1 \rangle$ türü ikililer arasında en küçüğüdür. $\langle W_1, L \rangle$ ikilileri ile $\langle L, 0 \rangle$ ikilileri arasında bir tür kesim oluşturur. Bununla birlikte $\langle L, W_1 \rangle$ türü

ikililer arasında minimal olan bir ikili vardır: $\langle L, 0 \rangle$ 'ı takip eden $\langle L, 1 \rangle$ ikilisi. Burada minimallik (kesindir) ile maksimallik (ardışıklığı varsayar) arasında ordinallere özgü çarpıcı bir simetri eksikliği bulunur. $\langle L, 0 \rangle$ ikilisi $W_1 \in L$ için $\langle W_1, L \rangle$ dizisinin limiti veya üst sınırıdır ve $\langle L, 1 \rangle$ ikilisinin öncelidir. Solunda veya kendisinin “berisinde” sonsuz bir bağlılık ve sağında, kendisinin ötesinde tek bir ek adımın boşluğunu yaratır.

17.12 $\langle s_1, s_2 \rangle$ veya $\langle L_1, L_2 \rangle$ türü “homojen” ikilileri inceleyelim. Yine her şey bu ikililerin maksimumuna bağlı olacak:

- s_1 veya L_1 maksimumsa mesele basittir: $\langle s_1, s_2 \rangle$ ardıldır. Biraz üzerine düşünüldüğünde bu ikilinin s_1 (Max.) ve s_1 'in önceli tarafından oluşturulan ikiliden hemen sonra geldiği görülecektir. $\langle L_1, L_2 \rangle$ ise, W_1, L_2 ordinalinin elemanlarını katetmek üzere $\langle L_1, W_1 \rangle$ türü ikililer dizisinin limitidir.

- s_2 veya L_2 maksimumsa problem yine çok zor değildir. $\langle s_1, s_2 \rangle$ 'nin ardıl olduğu kesindir: s_1 'in önceli ve s_2 maksimumu tarafından oluşturulan ikiliden hemen sonra gelir. $\langle L_1, L_2 \rangle$ ise, W_1 O'dan L_1 'e “kadar” L_1 ordinalinin elemanlarını katetmek üzere, $\langle W_1, L_2 \rangle$ türü ikililer dizisinin limitidir.

17.13 Karma ikililerle konuyu bitirelim. Yöntemde pek bir şey değişmez:

- $\langle s, L \rangle$ veya $\langle L, s \rangle$ türü bir ikilide maksimum olan L ise bu ikililer ardıldır: s 'nin yerine önceli konularak elde edilen ikililerden hemen sonra gelirler.

- Maksimum olan s ise, W_1 limit ordinalin elemanlarını katetmek üzere, $\langle s, W_1 \rangle$ veya $\langle W_1, s \rangle$ türü ikililer dizisinin limitidir.

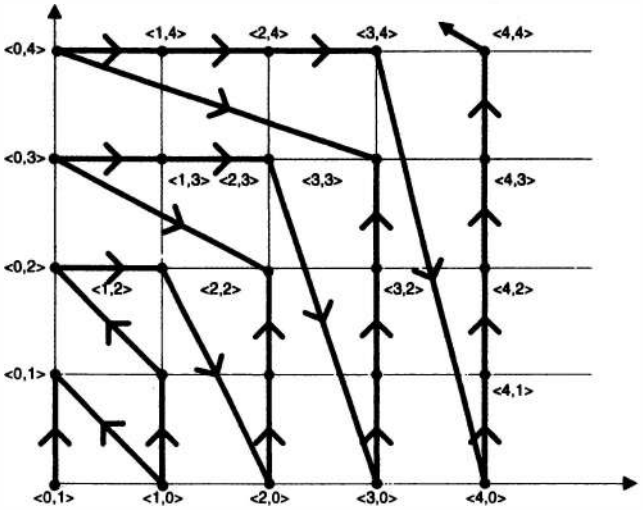
17.14 Sonunda ikililerin içkin tanımlanmasına dair tabloyu elde ederiz:

tür	Max.	örnek	niteliği
$\langle 0, 0 \rangle$	0	Biriciktir	özel
$\langle 0, s \rangle$	s	$\langle 0, 1 \rangle$	ardıl
$\langle 0, L \rangle$	L	$\langle 0, \omega \rangle$	limit
$\langle s, 0 \rangle$	s	$\langle 1, 0 \rangle$	ardıl
$\langle L, 0 \rangle$	L	$\langle \omega, 0 \rangle$	limit
$\langle s_1, s_2 \rangle$	s_1	$\langle 2, 1 \rangle$	ardıl
$\langle s_1, s_2 \rangle$	s_2	$\langle 1, 2 \rangle$	ardıl
$\langle L_1, L_2 \rangle$	L_1	$\langle \omega_1, \omega \rangle$	limit
$\langle L_1, L_2 \rangle$	L_2	$\langle \omega, \omega_1 \rangle$	limit
$\langle s, L \rangle$	s	$\langle S(\omega), \omega \rangle$	limit
$\langle s, L \rangle$	L	$\langle 1, \omega \rangle$	ardıl
$\langle L, s \rangle$	s	$\langle \omega, S(\omega) \rangle$	limit
$\langle L, s \rangle$	L	$\langle \omega, 1 \rangle$	ardıl

Bu tablo, her türlü inşanın ontolojik kaidesi olan (boşluğun kendisiyle oluşturduğu açılış ikilisi hariç) mükemmel bir simetri sergiler.

17.15 Ordinal ikilileri dizisinin başlangıcını görselleştirmek hayli eğlencelidir.

$\langle 0,0 \rangle$ ikilisinden sonra $\langle 0,1 \rangle$, daha sonra $\langle 1,0 \rangle$ ikilisinin geldiğini görmüştük. Maksimumu 1 olan en büyük ikili olarak $\langle 1,1 \rangle$ 'in $\langle 1,0 \rangle$ 'ın ardılı olduğunu görüyoruz. Daha sonra önceden belirtmiş olduğumuz gibi maksimumu 2 olan en küçük ikili olarak $\langle 0,2 \rangle$ gelir. Birinci yerde bulunan ordinali yatay eksen ve ikinci yerde bulunan ordinali dikey eksen temsil ederek ikililerin ardışıklığını kareli bir grafikte gösterirsek şöyle bir çizim elde ederiz:



Bu çizimde ikililerin bir ordinal eksenine üzerine yansıtılabilecek bir “zincir” gibi ilerlediği görülüyor. Önceli belirlendiğinde n 'inci ikilinin nasıl “üretileceğini” biliriz. Ordinaler ile ordinal ikilileri arasında terim

terim bir eşleme kurarak bu sezgiyi biçimselleştirmek davetkârdır, zira “limite geçiş”in hiçbir engel oluşturmadığını görmüştük: Limit ikiliye dair, yapısal bakımdan ardıl ikiliden ayırt edilemez olan bir kavram vardır. İkilileri (bunlar bir düzlem veya bir yüzeyde temsil edilebilirler) bunları oluşturan şeylerin (basit ordinaller) doğrusallığında yansıtan bu muazzam inşa ontolojinin bir zaferidir. İkilide basitte olduğundan daha fazla şey olmadığını gösterir. İkinin farkını doğrusallaştırır.

- 17.16 Altta yatan isteğimiz, ordinal ikililerinin tıpkı ordinalerin kendisi “gibi” davrandığını ispatlamak. En basiti ordinal ikilileriyle ordinaller arasında birebir ve örten bir eşleme oluşturmak (bkz. 4.5). Bununla beraber, tutarsız iki çokluk arasında bir eşleme veya fonksiyondan bahsetmek riskli, hatta absürttür. Ne ordinaller ne de ordinal ikilileri kümedir. Bütünleştirilemeyen iki koleksiyonun kıyaslanması veya birbirine bağlanması nasıl meşrulaştırılabilir?

Bu çıkmazın zorlamasına dair ilkeyi 10. bölümde vermiştik: Şayet yapabiliyorsak ordinaller ile ikililer arasındaki eşlemeyi sonluötesi tümevarımla veya yinelemeyle tanımlamak gerekiyor. Bu fonksiyon sadece ardıl düzeylerle, arasında işlem yaptığı bütünleri düşünmeye gerek olmadan tanımlanacak.

- 17.17 Tanımlamak istediğimiz ve her ordinal ikilisiyle birebir ve örten bir şekilde bir ordinali eşleştirecek fonksiyon $f(<W_1, W_2>)$ olsun: $f(<W_1, W_2>) = W_3$.

f fonksiyonunun kökünü önce ilk değerinde, ikililerin en küçüğüne, $<0,0>$ ikilisine tekabül eden değer-

de bulalım. Tüm bu prosedür için 10. bölüme başvurabilirsiniz.

Açık bir şekilde aşağıdakini koyutlarız:

$$1. \text{ kural: } f(<0,0>) = 0.$$

Daha sonra ardıl ikililerin durumunu inceleriz (bkz. 17.14'te verilen ikililerin tipolojisi). C_2 , C_1 ikilisinin ardılı olan bir ikili olsun. Bunu ordinaller için kabul ettiğimiz notasyonu genişleterek $C_2 = S(C_1)$ şeklinde göstereceğiz. En basit yaklaşım, C_1 ikilisinin ardılı olan C_2 ikilisini, C_1 'le f fonksiyonu üzerinden eşleştirilen ordinalin ardıl ordinaliyle f fonksiyonu üzerinden eşleştirmek olacaktır: İkililerin ardışıklığına "paralel olarak" ordinallerin ardışık olmasını sağlıyoruz. Böylelikle tümevarım veya yineleme fikrine uymuş oluyoruz: C_1 ikilisi için f fonksiyonunun tanımlanmış olduğu varsayıldığında C_1 'in ardılı olan C_2 ikilisi için bu fonksiyonu açık bir kuralla tanımlıyoruz. Dolayısıyla aşağıdaki kuralı koyutluyoruz:

$$2. \text{ kural: } f(C_2) = f(S(C_1)) = S(f(C_1))$$

Limit ikililerine gelelim. f fonksiyonunun bir CL limit ikilisinden önce gelen tüm ikililer için tanımlandığını varsayalım. Tüm bu ikilileri f fonksiyonu bir ordinalle eşleştirecektir: $W = f(C)$. Buradaki fikir CL limit ikilisi için CL'yi önceleyen ikililerle f üzerinden ilişkilendirilmiş tüm ordinallerden "sonra" gelen ordinali f fonksiyonunun değeri olarak almaktır. Bir ordinaler kümesinden hemen "sonra" gelen bu ordinalin var olduğunu biliyoruz (bkz. N6): Bu, söz konusu kümenin sup. ile gösterilen üst sınırıdır. Dolayısıyla $f(CL)$ 'nin

CL'den küçük C'ler kümesi için tüm $f(C)$ ordinallerinin sup., yani üst sınırı olduğunu koyutlayacağız. Yani:

3. kural: $C < CL$ için $f(CL) = \sup.(f(C))$.

f 'nin tümevarımsal tanımı böylelikle tamamlanmış olur, zira üç durumu da ele aldık: değerinin söz konusu terimin “altında” elde edilmiş değerlere bağlı olmasını sağlayacak açık bir kuralla f 'yi tanımlayarak, minimum $\langle 0,0 \rangle$, ardıllar ve limitler.

17.18 Birkaç örnek.

Örneğin $f(\langle 0,1 \rangle)$ 'in değeri nedir? $\langle 0,1 \rangle$ ikilisinin ikililerin sıra düzeninde $\langle 0,0 \rangle$ ikilisinin ardılı olduğunu görmüştük. 2. kuralı uygulayalım: $f(\langle 0,1 \rangle) = S(f(\langle 0,0 \rangle))$. 1. kural $f(\langle 0,0 \rangle) = 0$ olduğunu söyler. Dolayısıyla $f(\langle 0,1 \rangle) = S(0) = 1$.

$f(0,\omega)$ 'nin değeri nedir? $\langle 0,\omega \rangle$ ikilisinin m ve n sonlu ordinaler (doğal tam sayılar) olmak üzere tüm $\langle m,n \rangle$ şeklindeki ikililerden oluşan kümeden hemen sonra geldiğini görmüştük. Ardıl bir ikiliyle onun önceline karşılık gelen ordinalin ardılı ilişkilendirileceği ve 0 ile başladığımız için, f 'nin tüm bu ikililerle sonlu ordinaleri ilişkilendirdiği açıktır. $\langle m,n \rangle$ türü ikililer 0, 1, 2, vs. dizisiyle eşleşecektir. Bunun sonucunda $f(\langle 0,\omega \rangle)$ fonksiyonun değeri tüm sonlu ordinalerin üst sınırı, dolayısıyla sonsuz ilk ordinal, yani ω olacaktır. Öyleyse $f(\langle 0,\omega \rangle) = \omega$ olur.

Bu basit örnekler herhangi bir ikili için f fonksiyonunu hesaplayabilecek durumda olduğumuzu gösterir: İkililerin iyi sıralılığı boyunca “ilerlemek” yeterlidir. Birinci ikili için değer sabitlendikten sonra 2. ve 3.

kurallar, önceki ikililere f fonksiyonunun atadığı değerlerden hareketle bir C ikilisi için f fonksiyonunun değerini bulmamıza olanak verir.

17.19 Üç kuralla tümevarımsal olarak tanımlanan f fonksiyonumuzun birebir ve örten olduğu, aşikâr olmasına rağmen doğrulanmalıdır.

Öncelikle f fonksiyonunun birebir veya Dedekind'in terminolojisiyle ayrı fonksiyon (bkz. 4.5) olduğunu doğrulamak gerekiyor. Başka bir deyişle, C_1 ikilisi C_2 ikilisinden farklıysa $f(C_1)$ ordinalinin $f(C_2)$ ordinalinden farklı olduğunu doğrulamak gerekiyor. Tümevarım kurallarına göz attığımızda bundan emin olabiliriz. İki ikili farklıysa sıralıdır; mesela $C_1 < C_2$. $f(C_2)$ 'nin değeri önceki ikililer için f fonksiyonunun değerine bağlıdır ve tüm bu değerlerden farklıdır. Özellikle C_2 'den önce gelen C_1 için f fonksiyonunun değerinden farklıdır. Dolayısıyla $C_1 \neq C_2 \rightarrow f(C_1) \neq f(C_2)$ olur. f fonksiyonu birebirdir.

Aslında daha güçlü bir özelliğimiz vardır: Fonksiyon, ikililerin sırasını ordinallerin sırasına "yansıtır" (teknik olarak: ordinallerin sırasında ikililerin sırasının bir homomorfizmidir); öyle ki $C_1 < C_2$ ise $f(C_1) \in f(C_2)$ olur. Zira C_2 C_1 'den sonra geliyorsa f aracılığıyla değeri (bu, ya önceki ikilinin değerinin ardılı ya da önceki tüm ikililerin f üzerinden atanan değerlerinin üst sınırıdır) her koşulda C_1 'in f üzerinden atanan değerini aşar. Sonuç olarak şunu elde ederiz: $C_1 < C_2 \rightarrow f(C_1) \in f(C_2)$.

Geriye f fonksiyonunun örten olduğunu –yani fonksiyonun her mümkün değerinin fiilen elde edildiğini–

ispatlamak kalıyor. Yani, her W ordinali için, $f(C) = W$ olacak şekilde bir C ordinal ikilisinin var olduğunu ispatlamak.

f fonksiyonu üzerinden bir C ikilisinin değeri olmayan bir W ordinali olduğunu varsayalım. Bu durumda böyle olan bir en küçük ordinal var olacaktır (minimallik ilkesi); bunu w diye adlandıralım. Böylelikle w 'den küçük olan tüm ordinaller f üzerinden bir ikiliyle eşleşecektir. Hipoteze zıt olarak w 'nin de zorunlu olarak f üzerinden bir ikiliyle eşleşmesi gerektiği görülür. Zira w bir ardılsa, yani $w = S(w_1)$ ise ve $f(C) = w_1$ ise (f fonksiyonunun tümevarımsal tanımının 2. kuralı gereği) $f(S(C)) = S(w_1) = w$ olmalıdır. Şayet w limitse, w 'yi önceleyen tüm ordinaller f üzerinden ikililerle eşleneceği için w 'nin kendisi tüm bu ordinallerin üst sınırı olacak ve dolayısıyla 3. kurala göre w 'den küçük ordinallerle eşleşen tüm ikililerden “sonra” gelen ikili için f fonksiyonunun değeri olacaktır.

Nihayetinde f fonksiyonu, ikililerle ordinaller arasında birebir ve örten bir eşlemedir. Bu eşleme ayrıca ikililerin sıra yapısıyla (Max. üzerinden birinci terim, sonra ikinci terim) ordinallerin sıra yapısı (aidiyet) arasında bir izomorfizmdir. Bu, ordinal ikililerinin, basit ordinallerin ne düzeyde “ikiz” imgesi olduğunu gösterir. “İkili” halde ele alındığında doğa kendisine benzerliğini korur. Doğa, kendisinin aynasıdır.

17.20 İkizinin ayna imgesinde doğada yapılan bu gezinti bize şunları öğretir:

- ordinal ikililerinde bir iyi sıralılık vardır; öyle ki bu ikililer tıpkı ordinaller gibi minimallik ilkesine uyarlar;

- ordinallerde olduğu gibi burada da ardıl ve limit ikililerden bahsedebiliriz ve bu niteliklerin sadece bu niteliği taşıyan ikililerin yapısının içkin şekilde incelenmesiyle tespit edilmesi mümkündür;

- ikililer ile ordinaller arasında birebir ve örten bir eşlemenin tüm özelliklerine sahip bir f fonksiyonu vardır; fakat tek fark bu fonksiyonun arasında yer aldığı bütünlüklerin tutarsız olması, dolayısıyla f fonksiyonunun sonluötesi tümevarımla tanımlanması gerekmektedir;

- bu f fonksiyonu ordinal ikililerinin sıra yapısıyla ordinallerin sıra yapısı arasında bir izomorfizm tanımlar; yani $C_1 < C_2$ ise $f(C_1) \in f(C_2)$ olmalıdır.

İkizinin ayna imgesinde doğa tüm biçimsel davranışlarında ısrar eder.

Benzer araçlar $\langle W_1, W_2, W_3 \rangle$ türü ordinal üçlülerinin de ikililerle aynı özelliklere sahip olduğunu ve özel olarak basit ordinallerle birebir ve örten bir eşleme olduğunu göstermeye olanak verecektir. Keza $\langle W_1, W_2, \dots, W_n \rangle$ türü n terimli ordinaller için de aynısı geçerlidir. Madde bakımından maliyetli olan sadece ilk adımdır. İkiye katlanan doğa kendi sıra düzenini muhafaza eder. İstenildiği kadar uzun sonlu seri halinde çoğaltılsın, doğa ilk kimliğini muhafaza etmekte ınat eder. İstikrar, homojenlik, sıralılık, minimallik, ardıllar ile limitler arasındaki ontolojik boşluk: Tüm bunlar sonlunun sınırlarında ordinalin basitliği çoğaltıldığında değişmeden kalır. Doğa, kendi aynalarından oluşan bir galeridir.

17.21 Mallarmé “Doğa meydana gelir, ona hiçbir şey eklenemez” diye yazmıştı. Çünkü şayet doğaya bir şey ek-

lenirse ve hatta bu ek de eklenirse doğal çokluklar alanı inatla Aynı'nın önemini tasdikler. Her doğal deneyimde bizi yakalayan budur: Dallanıp budaklanan büyüme, üretken çoğalma bize Ötekini sunmak şöyle dursun kendi sıra düzeninin sonsuz kaidesinde kendi üzerine dayanır.

Halbuki her işlemin, tüm cebirin, üzerinde işlem yapılan terimleri ikiye veya üçe katlamak anlamına geldiğini biliyoruz. İki sayıyı ekleyerek üçüncü bir sayı elde ederiz, iki sayının en küçük ortak bölenini hesaplarız, bir polinomun bileşenlerini sonlu dizi halinde düzenleriz... Tüm bu hesaplama ve cebir disiplinlerinin alt yapısı sayısal işaretlerin sonlu bir listesidir.

Doğal sayıların, ordinalerin Sayının maddesini ördüğü doğruysa işlemler, cebir, hesaplama *olanağının* teminatını doğanın çoğalmada özdeşliğini muhafaza etme kapasitesinde bulacağı görülecektir. Hesaplama şemalarının görünürdeki çeşitliliği, cebirsel işlemlerin ve yapıların türölülüğü altında doğal varlığın sebatı, sonlu serisellikteki içkin istikrar vardır. Bir işlem, *bizim* düşüncemizin Mallarmé'nin düsturuna uyumlu hale gelme tarzından başka bir şey değildir: Ötekinin parçalanmasına maruz kalmadan iki Sayıyı toplayabiliyorsak –birini diğerine “ekleyebiliyorsak”– bunun nedeni ikiz olarak alınan, kendisiyle toplanan, kendisine eklenen doğanın tutarsız halde olmasına neden olan çoklu-varlıkların içkin biçimini korumasıdır.

Bir işlem, bir hesap, bir cebir, varlığın –doğal çoklukların tasarruf ettiğı haliyle Aynı'nın yasası uyarınca– savurganca sunduğı ayna oyunlarına düşüncemizin yakalanmasının işaretlerinden ibarettir.

18. Sayıların cebiri

18.1 Sonunda hesaplamaya gelmemiz gerekiyor.

Varlığı saptandıktan sonra, Sayının birleşimsel kapasitesi sadece bir sonuçtur. Sayı ikilileri veya üçlülerini etkileyebilen bağlar söz konusu olduğunda bu kapasite bir araştırma ustalığıyla ilgilidir. Fakat bu bağların kaynağı tamamen Sayının varlığa demir atmasını sağlayan kavramda içerilmektedir. İşlemler sadece Sayının sayısız alanında varlığın savurganlığını mümkün bağlantılarda harekete geçirir.

Bununla birlikte güçlük, hesaplamanın imkânlarına uygun olmaları için bağlara dair “iyi” tanımların seçilmesindedir: İşlemlerin birleşme [*associative*] özelliğine sahip olması, bir etkisiz eleman, ters elemanlar olması istenecek ve değişme [*commutative*] özelliğine sahip olması da fena olmayacaktır. Bir işlemin diğeri üzerinde dağılma özelliğine sahip olmasıyla işlemler aralarında düzgün bir şekilde düzenleniyorlarsa bu bizi daha da memnun edecek. Bu sonuçlara ulaşmak için Sayıyı incelemek ve tanımlamak istenen bağı dikkatli bir şekilde yasalaştırmak gerekir.

18.2 İşlemsel tanımların marifetiyle elde etmeyi başardığımız önemli sonuçlar aşağıda verilmektedir:

1) Sayılar üzerinde, değişmeli bir grubun özelliklerine sahip olan ve + işaretiyle gösterilen toplama adlı bir ilk işlem tanımlanabilir:

- birleşme özelliği: $N_1 + (N_2 + N_3) = (N_1 + N_2) + N_3$
 (“istediğimiz sırada” hesaplayabilir ve aynı sonucu elde ederiz);

- etkisiz eleman (Sıfırdır): $N_1 + 0 = N_1$;

- ters eleman (simetridir): $N_1 + (-N_1) = 0$;

- değişme özelliği: $N_1 + N_2 = N_2 + N_1$.

2) Sayılar üzerinde, çarpma olarak adlandırılan, . ile gösterilen ve aşağıdaki özelliklere sahip ikinci bir işlem tanımlanabilir:

- birleşme özelliği: $N_1.(N_2.N_3) = (N_1.N_2).N_3$;

- etkisiz eleman (1 Sayısıdır): $N_1.1 = N_1$;

- Sıfırdan farklı her Sayı için bir $i(N)$ ters elemanının varlığı: $N_1.i(N_1) = 1$;

- değişme özelliği: $N_1.N_2 = N_2.N_1$.

3) Çarpma işlemi toplama üzerinde dağılma özelliğine sahiptir:

$$N_1.(N_2 + N_3) = (N_1.N_2) + (N_1.N_3).$$

Bu üç işlemsel husus Sayıların *değişmeli bir cisim oluşturduğunu* söylememize imkân verebilirdi, ama bir pürüz vardır: Sayılar tutarsız oldukları için *bir küme bile oluşturmazlar*. Bir çokluk olarak sayılmaya olanak vermiyorsa, tanımlanmış bir cebirsel kendilik olarak *bir cisim nedir?*

Dolayısıyla ihtiyatlı davranıp şöyle diyeceğiz: Maddesi belirli bir sonsuz kardinalden küçük Sayılardan oluşan her küme (yani, maddesi sabit bir sonsuz “ham” nicelikle sınırlanmış olan Sayılardan oluşan her küme)

değişmeli bir cisim yapısı kazanabilir.⁴ Ayrıca rasyonel veya reel sayılarda gösterdiğimiz gibi, değişmeli cisimler olan başka Sayı kümeleri de vardır. Sayısal tutarsızlık sayısız nicelikte cebirsel yapılar olarak “kesilmeye” imkân verir.

Bu mantıksal şartlar bir yana, Sayıların cebiri tasavvur edilebilecek en zengin cebirdir: Hesaplama kapasitesi, sözgelimi reel Sayılardaki kapasiteyle aynıdır (özellikle her Sayının bir karekökü olduğu ispatlanabilir; halbuki örneğin rasyonel sayılar cisminde işlem yapıyorken durum böyle değildir).

- 18.3 Hem (doğrulama prosedürlerinde) zahmetli hem de (Sayıya dair kavramımızın geçerliliği için) büyük önem taşıyan bir sonuç şudur: Sayılar üzerinde tanımlanan işlemler, Sayılar olarak varlıklarında düşünüldüğünde “bizim” sayılarımızda tanımlanmış işlemlerle çıkarılır. Başka bir deyişle: r_1 ve r_2 alışıldık cebir içinde alınan iki reel sayı olsun. Bildiğimiz haliyle r_1 ve r_2 toplamı r_3 reel sayısıysa, Sayılarda (sonlu veya ω 'ye eşit maddeli Sayılarla, bkz. 16.28) “bizzat” temsil edildikleri haliyle r_1 ve r_2 toplamı –Sayılar üzerinde tanımlandığı anlamıyla alman “toplamı”– tam da r_3 sayısının Sayı olarak temsilcisi olacaktır. Aynısı çarpma, vs. için de geçerlidir. Daha teknik terimlerle söylersek, klasik analizde bil-

4 Aynı şekilde, maddesi sonsuz bir kardinalden küçük veya ona eşit her Sayı kümesinin değişme özelliğine sahip bir cisim olduğu da doğrudur. Bu bakımdan Gonshor, sonlu veya ω 'ye eşit (sayılabilir) maddeli sayılar cisminin incelenmesinin çok ilginç olduğunu söylemekte haklıdır. Bu cisim alt-cisim olarak reel Sayılara olanak verir. Fakat ayrıca sonsuz küçüklükleri ve kesimlerin kesimlerini de içerir. Bu konuda tamamen özgün bir analiz geliştirmek mümkün olacaktır.

diğimiz haliyle reel sayılar cismi, Sayıların alt-kümesi olarak düşünülen reel sayılarla izomorftur.

Dolayısıyla “bizim” alışıldık sayılarımız sadece varlıklarında değil, aynı zamanda cebirde de Sayıların tekil türleri olarak düşünölmeye olanak verirler. Sonuçta reel Sayılar, reel sayılardan ayırt edilemezdir. Özel olarak reel Sayılar tam ve sıralı bir Arşimet cismi oluşturur ve bu da geleneksel reel sayıların birebir tanımıdır.

Nihayetinde “tarihsel” sayıların tüm boyutları ve kapasitelerinin, Sayıların sayısız kalabalığında bunların sunumsal örnekleriyle sürdüröldüğü ortaya çıkar. Bu da aşağıdakileri doğrular:

- bir sayının ontolojik özü, belirli bir Sayı türü olarak belirlendiğı anda sadece düşöncemizin ona dair kavradığı şeyden ibarettir;

- işlemsel veya cebirsel özellikler sadece Sayının varlığına dair, doğal çokluklar temelinde doğru bir belirleminin bir sonucudur.

Sayı kavramını birleştirme planı (doğal sayılar, negatif tam sayılar, rasyonel sayılar, reel sayılar ve ordinnelleri kapsayan tek bir kavram) böylelikle önce çoklu-varlıkta ve daha sonra işlemsel boyutlarda tamamlanmıştır.

Bundan böyle bir ordinalle reel bir sayının toplamı veya sonlu ötesi bir ordinalin rasyonel bir sayıyla bölümü veya bir ordinalin üçe bölümünün karekökü gibi daha önce anlamı olmayan kendiliklerden serbestçe konuşmamız ve bunları hesaplamaya tabi tutmamız mümkündür. Tarihsel sayılara dair dağınık ve eksik te-oride hiçbir anlamı olmayan

$$\frac{\frac{1}{2} \omega_1 + \sqrt{\pi + \omega^2 + 7(x^{\omega+5} + 2\omega)}}{(\omega^7 + 2^\omega) \left(\frac{1}{3} S(\omega) - \frac{17}{5} \right)}$$

gibi inanılmaz yazımlar Sayıya dair birleştirilmiş kavram çerçevesinde hesaplama prosedürlerine ve tanımlanmış sonuçlara işaret eden bütünüyle anlamlı cebirsel yazılar haline gelir.

Böylelikle Sayı varlıkta “sayılar” gibi ayrık bir adla heterojen alanların sınırlarını belirleyen şeyin gerçek ilişkisini kurar.

- 18.4 Sayılar üzerinde işlemlerin tanımı özünde teknik bir meseledir. Ayrıntılarıyla öğrenmek isteyenler bu konudaki literatüre başvurabilirler.⁵ Yine de bu tanıma hayat veren zihniyet, kavramların gözden geçirilmesine, Sayı düşüncesinin üzerinden son bir kez geçmeye olanak verir. Özel olarak sonluötesi tümevarımın sistematik kullanımı, varlığı içinde düşünülen Sayının özünde sonsuz bir çokluk (sonsuz bir ordinal madde de bir biçim kesmesi) olduğunu ortaya çıkarır. Benzer şekilde işlemleri “alttan” inşa etmek amacıyla bir Sayının alt-Sayılarına başvurmak, her Sayının düşük ve yüksek kümesinin kesimi olarak sunulmasına imkân verdiği gerçeğinin önemini gösterir (bkz. 14. bölüm). Yine benzer şekilde, işlemin sonucunu bir kesim olarak sunarak (bkz. 15. bölüm), yani temel teoremi kullanarak tümevarımı kullanabiliriz. Son olarak, 17. bölümde incelenen ordinal ikilileri ile ordinaler arasındaki ko-

5 H. Gonshor, a.g.e., 3. Bölüm, “The basic operations”.

relasyon tüm bu meselede beklendiği gibi (bir işlem iki Sayıyı birbirine bağlar) temel bir rol oynar. Bu özetlerin zihinden uçmaması için toplamının tanımının temellerini ele alacağız.

- 18.5 Genel fikir şu şekildedir: N_1 ve N_2 gibi iki sayı verildiğinde bunların ilgili maddelerini, $W_1=M(N_1)$ ve $W_2=M(N_2)$ 'yi alarak bunlarla W_1 ve W_2 gibi iki ordinali eşleştirebiliriz. Her $\langle W_1, W_2 \rangle$ ordinal ikilisiyle bir ordinali ilişkilendiren birebir ve örten f fonksiyonuyla bu iki ordinalin bir ordinalle nasıl eşleştirileceğini biliyoruz (bkz. 17.17). Bu ordinal, toplama işleminin tanımının “seviyesi”ni tespit edecek: W_3 ve W_4 maddeli tüm N_3 ve N_4 Sayı ikilileri için, $\langle W_3, W_4 \rangle$ ikilisiyle f üzerinden eşleştirilen ordinal, $\langle W_1, W_2 \rangle$ ikilisiyle ilişkilendirilen ordinalden *daha küçük* olacak şekilde toplamayı tanımladığımız varsayılacak. Bir alt ordinal seviyesinde tanımlanmış $N_3 + N_4$ türü toplamlardan hareketle $N_1 + N_2$ toplamını tanımlayacak açık bir kural öne süreceğiz.

Böyle toplamalar N_1 ve N_2 alt-Sayıları tarafından verilir. Gerçekten de maddesinden küçük bir ordinal için Sayının bir “kesiti” olan bir alt-Sayının daha küçük bir maddesi vardır.

Sonra inşanın düğümü olan sonraki aşamaya geçilir. N_1 ve N_2 Sayıları W_1 ve W_2 maddeli sayılar olsun. N_1 'in N_1/w_3 ve N_2 'nin N_2/w_4 şeklinde alt-Sayılarını düşünelim. Şimdi $\langle w_3, W_2 \rangle$ veya $\langle W_1, w_4 \rangle$ ikililerini ele alalım. İkililerin sıra kuralları gereği ve w_3 ve w_4 'ün sırasıyla W_1 ve W_2 'den daha küçük olduğunu hatırlayarak (bkz. 17.6) bu ikililerin $\langle W_1, W_2 \rangle$ ikilisinden küçük olduğu-

nu söyleyebilirim. Okur için güzel bir alıştırma olsa da açıklamaya başvurabilirsiniz.⁶

f fonksiyonu, ikililerin sırasının ordinallerin sırası üzerindeki bir izomorfizmi olduğu için:

$$f(\langle w_3, W_2 \rangle) \in f(\langle W_1, W_2 \rangle)$$

$$\text{ve } f(\langle W_1, w_4 \rangle) \in f(\langle W_1, W_2 \rangle).$$

Bu da, $\langle N_1/w_3, N_2 \rangle$ veya $\langle N_1, N_2/w_4 \rangle$ türü Sayı ikilileriyle ilişkilendirilen ordinal seviyesinin daima $\langle N_1, N_2 \rangle$ Sayı ikilileriyle ilişkilendirilen ordinal seviyesinden küçük olacağı anlamına gelir.

Bu nedenle N_1 ile N_2 'nin toplamını tümevarımsal olarak tanımlamak için düşük bir ordinal seviyesine gönderen $N_1/w_3 + N_2$ veya $N_1 + N_2/w_4$ türü toplamaları tanımlanmış olarak varsaymamız mümkündür. Böylelikle $N_1 + N_2$ toplamının tanımına, bir yandan N_1 ile N_2 arasındaki farklı toplamaların değerlerinden, öte yandan N_1 ve N_2 'nin alt-Sayılarından hareketle bu toplamın değerini veren bir kural formüle ederek geçeceğiz. Alt-Sayı kavramının içkin kavramı, ele alınan iki Sayının maddelerinden oluşmuş ikiliden hareketle ordinal seviyelerini tespit eden tümevarıma dayanak olacak.

6 $f(\langle W_1, W_2 \rangle) = W$ olmak üzere, W_1 ve W_2 iki ordinal olsun. İkilide W_1 maksimale $w_4 \in W_2$ olmak üzere her $\langle W_1, w_4 \rangle$ ikilisi, ikililerin sıralanmasında $\langle W_1, W_2 \rangle$ ikilisinden küçüktür (bkz. 17.6); çünkü ikisinin de Max.'ı (W_1) ve birinci terimleri (W_1) aynıdır, fakat $\langle W_1, w_4 \rangle$ ikilisinin ikinci terimi $\langle W_1, W_2 \rangle$ ikilisinin ikinci teriminden daha küçüktür. Dolayısıyla, $f(\langle W_1, w_4 \rangle) \in f(\langle W_1, W_2 \rangle)$, zira f fonksiyonu ordinal ikilileri ordinaller arasında bir sıralama izomorfizmidir.

W_2 maksimale sonuç aynıdır, zira $\langle W_1, w_4 \rangle$ ikilisinin Max.'ı daha küçüktür.

Her durum için benzer türde bir doğrulama yapılabilir.

Son olarak kullandığımız strateji temel kesim teoremini kullanacak. N_1 ve N_2 gibi iki Sayının düşük ve yüksek kümesinden hareket edeceğiz. İki Sayının her birinin öteki Sayının düşük ve yüksek kümesinin alt-Sayılarıyla toplamalarının sabit bir birleşime göre tanımlandığını varsayacağız. Ordinal seviyeleri daha küçük olduğu için bu toplamalar kabul edilebilirler. Böylelikle iki Sayı kümesi elde edilecek ve N_1 ile N_2 toplamı bu iki kümenin kesimi olarak tanımlanmış biricik Sayı olacaktır.

18.6 İki Sayının toplamına dair tümevarımsal tanım.

Tümevarımın “sıfır seviyesi” sadece $(0,0)$ Sayısını içerir. Aslında maddesi 0 olan tek Sayıdır. Dolayısıyla şunu öne sürebiliriz:

1. kural: $(0,0)+(0,0)=(0,0)$.

Şimdi toplama işleminin bir W ordinalinden küçük tüm seviyeler için, yani maddeleri sırasıyla W_3 ve W_4 olmak üzere $f(W_3, W_4) \in W$ olacak şekilde (sırasıyla) N_3 ve N_4 Sayılarına karşılık gelen tüm seviyeler için tanımlanmış olduğunu varsayacağız.

Şimdi N_1 ve N_2 Sayılarından oluşan bir ikili ele alalım: bunların maddeleri sırasıyla W_1 ve W_2 ise $f(W_1, W_2) \in W$ olacaktır. Yani W ordinal seviyesine ait bir Sayılar ikilisi.

N_1/w ve N_2/w , N_1 ve N_2 'nin alt-Sayıları olmak üzere N_1 ve N_2/w veya N_1/w ve N_2 türü tüm ikililerin N_1 ve N_2 ikilisinden küçük, dolayısıyla W 'den küçük ordinal seviyelerine ait olduğunu belirtmiştik.

Bunun sonucunda N_1+N_2/w veya $N_1/w+N_2$ türü tüm toplamlar tanımlanmış olarak varsayılır.

Önemli bir yazım kuralını sabitleyelim. N_1 ve N_2 'nin düşük kümesindeki (hatırlatmak gerekirse, N_2 'nin düşük kümesi N_2 'nin N_2 'den küçük tüm alt-Sayılarından oluşmaktadır) tüm Sayıların toplamının tüm sonuçlarından oluşan *Sayılar kümesini* $N_1+Ba(N_2)$ ile göstereceğiz. $Ba(N_2)$ boşsa $N_1+Ba(N_2)$ yazımının tanımlanmamış olduğunu düşüneceğiz (hesaplamalarda dikkate almayacağız).

Aynı şekilde N_1 ve N_2 'nin yüksek kümesindeki (N_2 'nin yüksek kümesi N_2 'nin N_2 'den büyük tüm alt-Sayılarından oluşmaktadır) tüm Sayıların toplamının tüm sonuçlarından oluşan *Sayılar kümesini* $N_1+Ht(N_2)$ ile göstereceğiz. $Ht(N_2)$ boşsa yine dikkate almayacağız.

$Ba(N_1)+N_2$ veya $HT(N_1)+N_2$ yazımlarında yer alan toplamaların sonucu olan Sayı kümelerini göstermek için aynı yazımı kullanacağız.

Böylelikle toplama işlemi şu şekilde tanımlanacak: Bir yandan, $Ba(N_1)+N_2$ 'nin tüm Sayılarıyla birlikte $N_1+Ba(N_2)$ 'nin tüm Sayılarından oluşan Sayılar kümesini alırız; öte yandan, $Ht(N_1)+N_2$ 'nin tüm Sayılarıyla birlikte $N_1+Ht(N_2)$ 'nin tüm Sayılarından oluşan Sayılar kümesini alırız. Başka bir deyişle, bir yandan N_1 ve N_2 'nin toplamı olan Sayılar ile öteki Sayının düşük kümesindeki alt-Sayıları ve öte yandan aynı toplamaları bu kez yüksek kümesinin alt-Sayılarıyla "bir araya getiririz".

Böylelikle B ve H olarak adlandırabileceğimiz iki Sayı kümesi elde ederiz.

B ve H'nin kesim durumunda olduğunu “artımlı” tümevarımla (bu gösterimi bir kenara bırakıyorum⁷) pek bir sıkıntı çekmeden gösterebiliriz: B'nin her Sayısı H'nin her Sayısından küçüktür.

Daha sonra temel teoremi kullanırız (15. bölüm). N_1 ve N_2 toplamının sonucu tam da bu kümeler arasında kesim oluşturan Sayı, yani kümeler arasında yer alan minimal maddeli biricik Sayı olacaktır:

$$\begin{aligned} B &= (Ba(N_1)+N_2, N_1+Ba(N_2)) \\ H &= (Ht(N_1)+N_2, N_1+Ht(N_2)) \end{aligned}$$

Aşağıdaki önermeyi ileri süreriz:

2. kural: $N_1+N_2=B/H$, yukarıda tanımlanmış iki kümenin kesimi.

18.7 Toplama işlemi değişme özelliğine sahiptir.

Bir güçlkle karşılaşmadan tümevarımsal olarak gösterdiğimiz gibi N_2+N_1 toplamını tanımladığı varsayılan kesim, N_1+N_2 toplamını tanımlayan kesimle aynı kümeler üzerindedir.

Sadece toplamın olduğu 0 seviyesinde bu kesinlikle doğrudur ve bu toplam değişme özelliğine sahiptir: $0+0$.

$f(W_1, W_2) = W$ 'den küçük ordinal seviyesi toplamlarının değişme özelliğine sahip olduğunu varsayalım. Bu durumda özel olarak $Ba(N_1)+N_2$ veya $N_1+Ba(N_2)$ toplamaları değişme özelliğine sahiptir. Dolayısıyla N_1+N_2 'yi ta-

7 Söz konusu artımlı tümevarım aynı anda iki şeyin ispatlanmasından oluşur:

- $N_2 < N_3$ ise $N_1+N_2 < N_1+N_3$ (sıralılık ve toplama yapısının uyumluluğu);
- B kümesinin Sayılarının H kümesinin sayılarından daha küçük olduğu.

nımlamaya yarayan $B = (Ba(N_1)+N_2, N_1+Ba(N_2))$ kümesi, N_2+N_1 'i tanımlamaya yarayan $B' = (Ba(N_2)+N_1, N_2+Ba(N_1))$ kümesiyle aynı Sayılardan oluşur. Aynısı açık bir şekilde H kümesi için de doğrudur. Sonuç olarak, N_1+N_2 'yle aynı kesimle tanımlanan N_2+N_1 ona eşittir: Toplama işlemi değişme özelliğine sahiptir.

18.8 *0 Sayısı, daha kesin bir şekilde (0,0) Sayısı, toplama işlemi için etkisiz elemandır.*

Söz konusu olan her N Sayısı için $N+0=N$ olduğunu göstermektir. Tümevarım bu kez doğrudan Sayıların ordinal-maddesi üzerinde yapılabilir.

0 seviyesinde bu doğrudur, zira 1. kural $0+0=0$ olmasını gerektirir.

Bunun W_1 'den küçük maddeli tüm Sayılar için doğru olduğunu varsayalım. Başka bir deyişle, $w \in W_1$ olmak üzere w maddeli her N Sayısı için $N+0=N$ olur.

Şimdi W_1 maddeli bir N_1 Sayısını alalım. N_1+0 toplamını inceleyelim. Toplamayı tanımlayan kesimin B ve H kümeleri şu şekildedir:

$$B = (Ba(N_1)+0, Ba(0)+N_1)$$

$$H = (Ht(N_1)+0, Ht(0)+N_1)$$

Fakat 0 Sayısının –yani (0,0)– düşük ve yüksek kümesi boştur (0'ın hiçbir alt-Sayısı yoktur). 18.6'da kabul ettiğimiz uzlaşım gereği $Ba(0)+N_1$ ve $Ht(0)+N_1$ terimlerini hesaba katmayacağız. Dolayısıyla şunu elde ederiz:

$$B = (Ba(N_1)+0)$$

$$H = (Ht(N_1)+0)$$

Fakat $Ba(N_1)$ ve $Ht(N_1)$, N_1 'in alt-Sayılarından, dolayısıyla W_1 'den küçük maddeli Sayılardan oluşur. Sonuç olarak tümevarım hipotezi, $Ba(N_1)$ veya $Ht(N_1)$ 'in tüm Sayıları için uygulanır: Bu Sayı örneğin N_1/w_2 ise $N_1/w_2+0 = N_1/w_2$ olur.

Notasyonun sınırlarını biraz zorlayarak bu sonucu $Ba(N_1)+0 = Ba(N_1)$ ve $Ht(N_1)+0 = Ht(N_1)$ şeklinde yazabiliriz. Öyle ki sonuç olarak, kesimle N_1+0 toplamını tanımlayan B ve H, $Ba(N_1)$ ve $Ht(N_1)$ 'den başkası değildir. Gelgelelim düşük ve yüksek kümesi arasındaki kesimle tanımlanan Sayı, bizzat N_1 Sayısıdır ve gerçekten de $N_1+0 = N_1$ olur.

Tümevarım tamamlanmıştır: Maddesi ne olursa olsun bir N Sayısı için 0, toplama işleminde etkisiz elemandır.

18.9 *O'dan farklı her N Sayısı için -N Sayısı toplama açısından ters elemandır: $N+(-N)=0$.*

Önemli bir uyarı: $-N$, N 'nin biçim ve atığını tersyüz ettiği için $-N$ 'nin düşük kümesi, N/w N 'nin yüksek kümesinin bir Sayısı olmak üzere $-N/w$ Sayılarından oluşur; $-N$ 'nin yüksek kümesi, N/w N 'nin düşük kümesinin bir Sayısı olmak üzere $-N/w$ Sayılarından oluşur. Nitekim bir N/w alt-Sayısı, şayet w biçimdeyse düşük kümededir ve w atıktaysa yüksek kümededir. Bu saptamalar $-N$ söz konusu olduğunda ters döner. N 'de w 'yi önceleyen her şey de terse döneceği için (biçimde olan atıktadır ve atıkta olan biçimdedir) düşük ve yüksek kümenin yer değiştirmesi dışında pozitif ve negatif işaretleri de yer değiştirir.

Dolayısıyla notasyonu biraz zorlayarak $-N$ 'nin yüksek kümesini $-(Ba(N))$ şeklinde ve düşük kümesini $-(Ht(N))$ şeklinde yazabiliriz.

Bunun sonucunda (bkz. toplama işleminin tümevarımsal tanımı), $N+(-N)$ toplamını kesimle tanımlayan B ve H kümeleri aşağıdaki gibidir:

$$B = (Ba(N)+(-N), N+(-Ht(N)))$$

$$H = (Ht(N)+(-N), N+(-Ba(N)))$$

İspatlama stratejisi bu durumda B'nin tüm Sayılarının negatif ve H'nin tüm Sayılarının pozitif olduğunu göstermekten oluşur. Bunun sonucu 0'ın B ile H arasında yer almasıdır ve zorunlu olarak bu konumdaki minimal maddeli Sayı olduğu için B ile H arasındaki kesim konumunu işgal eden odur. Sonuç olarak $N+(-N)=0$.

Lemma: N_1+N_2 toplamı pozitifse, yani $N_1+N_2 > 0$ ise, $-(N_1) < N_2$ ve $-(N_2) < N_1$ olur.

Lemma, 0 ordinal seviyesinde doğrudur, çünkü bu seviyede $N_1+N_2 > 0$ olamaz.

W ordinal seviyesine kadar doğru olduğunu varsayalım: $f(W_3, W_4) \in W$ olacak şekilde her N_3 ve N_4 Sayı çifti için söz konusu özellik elde edilir. Ayrıca $f(W_1, W_2) \in W$ olacak şekilde her N_1 ve N_2 Sayı çifti için de özelliğin doğru olduğu söylenebilir.

N_1+N_2 toplamı bir B/H kesimiyle tanımlanmıştır. Bu kesim pozitifse nedeni B kümesinin pozitif Sayılar içermesidir⁸, aksi takdirde kesim negatif veya sıfır ola-

8 Gerçekten titiz davranmak adına B'nin pozitif Sayılar değil, 0 içerdiği durumu dikkate almak gerekir. Bu durumda 0, B'nin içsel maksimumudur. Dolayısıyla "sadece" 0'la kendimizi kısıtlayabilir veya B ile (0) kümesini özdeşleştirebiliriz. Bu durumda akıl yürütme çok basitleşir.

caktır (bkz. 15.11'deki kesim hakkındaki argümanlar). H kümesiye sadece pozitif Sayılar içerir. Sonuç olarak $Ba(N_1)+N_2$ veya $N_1+Ba(N_2)$ 'nin pozitif olan Sayıları vardır ve $Ht(N_1)+N_2$ veya $N_1+Ht(N_2)$ 'nin tüm Sayıları öyledir.

Örneğin $N_1/w+N_2$, $Ba(N_1)+N_2$ 'nin pozitif bir Sayısı olsun. N_1/w ve N_2 çifti W 'den küçük bir ordinal seviyesindedir ve lemmanın doğru olduğu varsayılır: $N_1/w+N_2$ toplamı pozitif olduğu için $-(N_2)<N_2/w$ olur ve N_1/w , N_1 'in düşük kümesinden olduğu için *a fortiori* $-(N_2)<N_1$ olur. B ve H kümelerinin diğer bileşenlerini inceleyerek lemmanın doğruluğu genel olarak gösterilebilir.

Şimdi $N+(-N)$ toplamına geri dönelim. Toplamı kesimle tanımlayan B kümesini düşünelim:

$$B = (Ba(N)+(-N), N+(-Ht(N))).$$

B'de pozitif Sayılar olduğunu varsayalım. Örneğin, N/w N'nin düşük kümesi olmak üzere $N/w+(-N)$ böyle bir Sayı olsun. Lemmadan dolayı $-(-N) < N/w$, yani $N < N/w$ olur, ki bu imkânsızdır çünkü N/w , N'nin düşük kümesi olduğu için N'den daha küçük olmalıdır. $N+(-N_1/w)$ pozitifse N_1/w N'nin yüksek kümesi olduğu için $N_1/w < N$ elde edilmelidir, ama N_1/w 'nin N'nin yüksek kümesine ait olması bunu engeller. Böylelikle bir çıkmazla karşılaşırız ve dolayısıyla B kümesinin pozitif Sayısı yoktur.

Benzer çıkarımlar H kümesinde negatif Sayı veya sıfır olmadığını gösterecektir.

Son olarak $N+(-N)$ toplamının sonucunu tanımlayan B/H kesimi negatif Sayılardan oluşan bir B küme-

si ile pozitif Sayılardan oluşan bir H kümesi arasında işler. Bu iki küme arasında yer alan minimal maddeli Sayı zorunlu olarak 0'dır ve $N+(-N)=0$ olur.

$-(N)$ 'nin, toplama işlemi için N 'nin tersi olduğu söylenecektir.

18.10 Sayıların toplamının birleşme özelliğine sahip olduğu da sıkıcı bir hesaplamadır. Hem de ne sıkıcıdır... Fakat bu kez kesimle tümevarımsal olarak tanımlanmış toplama özelliğine sahip Sayıların:

$$N_1+N_2 = (Ba(N_1)+N_2, N_1+Ba(N_2)) / (Ht(N_1)+N_2, N_1+Ht(N_2))$$

Sıfır Sayısının (ya da (0,0) veya 0; sonuçta hepsi aynı şeydir) etkisiz eleman olduğu değişme özelliğine sahip sıralı bir grup oluşturduğunu göstermiştik.

Pozitif ve negatif tam sayıların, rasyonel sayıların, reel sayıların, ordinalerin Sayılarımızdaki “temsilcileri”nin kendilerinin de, yalnızca varlıklarında düşünülen sayılar olduğunu doğrulamak için bu sayıların toplanmasının (yaygın anlamında), Sayılar olarak varlıklarının toplanmasıyla örtüştüğünü ispatlamak gerekir. Örneğin, r_1 ve r_2 reel cisimli sayılarsa ve “klasik” toplama işleminde $r_1+r_2=r_3$ elde ediyorsak sonlu maddeli veya ω maddeli Sayılar olarak tanımlanan r_1 , r_2 , r_3 Sayılarının, 16.27’de gösterdiğimiz gibi, toplama işlemi yukarıdaki gibi tümevarımla tanımlandığında, daima $r_1+r_2=r_3$ elde edilecek şekilde olmalıdır.

Cebirsel izomorfiye dair bu doğrulamalar, özellikle çarpma işlemi söz konusu olduğunda epey bir hüner gerektirir; biz böyle bir labirente girmekten kaçınacağız.

18.11 Doğal tam sayılar için doğrulamayla yetineceğim.

Sayı olarak sunulan bir n doğal tam sayısının, n sonlu bir ordinal olmak üzere (n, n) biçiminde olduğunu hatırlatayım (bkz. 16.13). Ayrıca n 'nin düşük kümesinin n 'den küçük tüm tam sayılardan oluştuğunu ve yüksek kümesinin boş olduğunu da hatırlatayım (*a.e.*).

(n_1, n_1) ve (n_2, n_2) iki doğal tam Sayı olsun. Bunların toplamı biçimsel olarak kesimle tanımlanır:

$$(Ba(n_1)+n_2, n_1+Ba(n_2)) / (Ht(n_1)+n_2, n_1+Ht(n_2))$$

Fakat $Ht(n_1)$ ve $Ht(n_2)$ boş olduğu için kesimin H kümesinin toplamaları tanımlanmamıştır (toplama işleminin tanımına dair kural, bkz. 18.6). Dolayısıyla H kümesi boştur ve bu da toplamın, B kümesinin üst sınırı olduğu anlamına gelir.

$Ba(n_1)$, n_1 'den küçük Sayılar kümesi olduğu için $Ba(n_1)+n_2$ toplamı tüm $0+n_2, 1+n_2, \dots, (n_1-1)+n_2$ toplamlarından oluşur.

Benzer şekilde $n_1+Ba(n_2)$ toplamı tüm $n_1+0, n_1+1, \dots, n_1+(n_2-1)$ toplamlarından oluşur.

Bu toplamların en büyük Sayısının n_1+n_2-1 olduğu açıktır.

Tümevarımla akıl yürütürsek: n_1, n_2 Sayı çiftine (yani gerçekte (n_1, n_1) ve (n_2, n_2) Sayılarına) tekabül eden ordinal mertebesine kadar, yani $w = f(n_1, n_2)$ ordinaline kadar Sayı olarak tam sayılar toplamının, tam sayıların (normal) toplamına karşılık gelen Sayı olduğunu varsayalım. n_1, n_2 çiftinden küçük bir ordinal mertebesinde olan $n_1, (n_2-1)$ çifti için bu özellik doğrudur. Dolayısıyla $(n_1, n_1) + ((n_2-1), (n_2-1)) = n_1$ ve (n_2-1) sayılarının normal toplamına karşılık gelen Sayı, yani

$(n_1+(n_2-1), n_1+(n_2-1))$ Sayısına karşılık geldiği doğru varsayılır; bu yazımda + işareti tam sayıların normal toplamını göstermektedir.⁹

n_1+n_2 'yi tanımlayan B kümesinin en büyük Sayısının $n_1+(n_2-1)$ olduğunu görmüştük. Tümevarım hipotezi sayesinde bu Sayı, normal toplama işlemine göre yazımına karşılık gelen Sayı, yani n_1+n_2-1 tam sayısını kaydeden Sayıdır.

Bu durumda n_1+n_2 (Sayı toplamı anlamında) B kümesinin üst sınırıdır. Her üst sınır 15.9'da göstermiş olduğumuz gibi (W,W) türü bir Sayıdır. Böylelikle B kümesinin üst sınırı, B'nin en büyük Sayısından büyük olan (n_1+n_2, n_1+n_2) Sayısına eşit (W,W) türündeki en küçük Sayı olacaktır (burada + ve - işaretleri normal anlamındadır). Bu Sayının (n_1+n_2, n_1+n_2) olduğu açıktır, çünkü n_1+n_2 , n_1+n_2-1 sonlu ordinalinden hemen sonra gelen sonlu ordinaldir.

Sonuç olarak n_1 ve n_2 tam sayılarının toplamı (Sayılarda kullanıldığı anlamıyla), n_1+n_2 toplamının (sayılarda kullanıldığı anlamıyla) sayısını temsil eden Sayıdır. Tam sayıların Sayılar olarak toplamı, tam sayıların sayılar olarak geleneksel toplamına izomorftur.

Negatif tam sayıların ele alınışında herhangi bir güçlük karşılaşılmaz (okur için ilginç bir alıştırma olabi-

9 Okur, yazımların belirsizliği nedeniyle rahatsız olabilir (< göstergesi ya Sayıların sırası için ya da şu veya bu sayı ailesinin sırası için kullanılır). Gerçekte (bu durumda "olası bir muğlaklık olmadığı"nı söyleyen) matematikçiler bu tür belirsizliklerle izomorf yapılarda tanımlanmış bağıntılar veya işlemleri özdeşleştirmeye ve dolayısıyla özdeş adlandırmaya doğal temayülleri göstermiş olurlar. Çoklukları değil, yapısal "nesneler" arasındaki "eşleşmeler"i tayin eden "morfizm"leri veya okları "ilkel öğeler" olarak kabul eden Kategoriler teorisi başka türlü nasıl ortaya çıkabilirdi ki?

lir). Böylelikle pozitif ve negatif tam Sayıların, cebirsel tam sayıların Z halkasının toplamsal grubuna izomorf olan değişme özelliğine sahip bir grup oluşturduğu doğrulanmış olur.

Okur işlemsel prosedürlerin özünü kavramış olmalıdır: bağlara dair tümevarımsal bir “iyi” tanım bulmak, klasik cebirsel özellikleri kanıtlamak (birleşme, değişme özellikleri, etkisiz eleman, ters eleman, dağılma özelliği...), elde edilenin Sayılarda temsil edilen klasik sayılar için bu sayıların sahip olduğu yapılarla izomorf olduğunu doğrulamak.

Bu çabalar ne kadar zahmetli olsa da istenen sonuca ulaşmaya olanak verirler: Bütün klasik cebirsel yapılar (cebirsel tam sayıların Z halkası, rasyonel sayıların Q cismi, reel sayıların R cismi) ve bütün “tutarsız” cebirler (ordinallerin toplamı ve çarpımı) Sayılarda ayırt edilebilir olan alt-yapılarla izomorftur.

Tüm sayı türleri her türlü boyutunda ve hiçbir istisna olmadan, Sayının biricik kavramı tarafından içerilmektedir.

Sonuç

19. Sonuç olarak: Sayıdan varlık-ötesine

19.1 Sayı, kavramın bir özelliği, işlemsel bir kurmaca, ampirik bir veri, kurucu veya aşkınsal bir kategori, bir sözdizimi, bir dil oyunu, hatta sıra düzenine dair düşüncemizin bir soyutlaması değildir. Sayı, *Varlığın bir biçimidir*. Daha kesin olarak söylemek gerekirse kullandığımız sayılar, Sayı olarak Varlığın sonsuz savurganlığı üzerinden minik bir örneklemdir sadece.

Özünde bir Sayı, doğal bir çoklukta, ordinal sıfatıyla varlık olarak varlığı içinde düşünülen bir çoklukta kesilip alınmış bir parçadır.

Sayı cebiri gibi, Sayıların doğrusal sırası da, bunların varlıklarını *bizim* katediş veya keşfediş yöntemimizdir. Bu yöntem zahmetli ve kısıtlıdır. Sayıyı, temel üç kategorisi ardışıklık, limit ve işlemler olan bağlarla örülü bir ağ olarak sergiler. Sayının yapısal veya birleşimsel varlığına dair illüzyon bundan kaynaklanır. Fakat gerçekte bu yapılar, Sayıda saf çokluk olarak kavranır olan şeyin sonlu düşüncemiz için sonuçlarıdır. Sayıyı bağlı bir sunum içine *yerleştirirler*; bu da Sayıyı nesne gibi işlediğimize inanmaya iter. Gelgelelim Sayı bir nesne değildir. Her türlü bağlı sunumdan önce ve varlığının bağısız ebediliğinde Sayı, çoklukta biçimsel bir kesme olarak düşünceye kendini açar.

Ayrıca doğal çoklukların temsil edilemez olan tutarsızlığında kesmesini kaydeden Sayı ile yapısal bağlarda kullandığımız sayı arasında, Varlık [*être*] ile var olan [*étant*] arasındaki fark onaylanır. Sayı, sayıların işlenebilir sayısallığı için varlık olarak varlığın yeridir. Sayı, varlığının gizilliği olarak sayının dışında-varolur [*ek-siste*].

19.2 Dolayısıyla olduğu haliyle Sayıya erişebilmemiz daha da önemli hale gelir, gerçi bu erişim aynı zamanda bir fazlalığa da işaret eder: varlığın bilgi üzerindeki fazlalılığı; sayı türlerinin sunumunda yapılandırabildiğimize kıyasla Sayıların sayısız/sayılamaz enginliğinde aşikâr olan bir fazlalık. Matematiğin en azından bu fazlalığa işaret *etmeye*, erişmeye olanak vermesi bu disiplinin ontolojik misyonunu onaylar. Sayı kavramı için olduğu kadar başka her türlü kavram için de matematiğin tarihi tam da bizatihi varlığın tutarsızlığı ile düşüncemizin bu tutarsızlıktan tutarlı hale getirebildiği arasındaki, özünde nihayetsiz ilişkinin tarihidir. Matematik, ontolojiyi varlığın tarihsel durumu olarak kurar. Ayrıca matematik sürekli olarak, ontolojik durumda sunulan yapıların gizilliği olarak, yapıları sonlu bir düşünce için etkilerden ibaret olan aşırı bir tutarsızlık ufkunu gün yüzüne çıkararak ontik-ontolojik fark içinde ilerler. Matematiğin bir noktasında tekrar oluşturduğumuz bu yoldur: sayıların ötesinde Sayıların tutarsız çoklu-ebediliğine işaret eden noktada.

19.3 Böylelikle Sayı varlığa iade edilmiş ve düşüncede destekliyor olduğu işlemlerin insaniliği veya sıra düzeninin figürlerinden eksiltilmiştir. Sayıyla ve sayılarla il-

gili görev, ontik-ontolojik farkta bunların kavramının konuşlanmasını takip etmekten ibaret olabilir ancak. Sayıyı düşünmek söz konusuysa Sayı münhasıran matematikle ilgilidir. Felsefi yorumumuz bu münhasırlığı buyurur ve Sayının bir durumun, ontolojik veya matematiksel durumun limitleri dahilinde varlığın kaynağı olarak kendini verdiği yere işaret eder.

Sayıya dair düşünce için Frege veya Peano'nun izlediği yolu terk etmek gerekiyor; keza Russel veya Wittgenstein'in yollarını da. Dedekind veya Cantor'un yaklaşımını radikalileştirmek, aşmak, çözülme noktasına kadar düşünmek zorunlu. Sayının tümdengelimle türetimi diye bir şey yoktur; söz konusu olan sadece tutarsız fazlalığında matematiksel revizyonların sonu gelmez hareketinde tarihsel tutarlılık olarak ortaya çıkan şeye sadık olmaktır.

Bu hareketin modern aşaması, boşluk ve sonsuzu Sayıya dair düşüncenin malzemeleri olarak tasdikler. Bununla birlikte bu kavramların hiçbirisi deneyimden çıkarsanamaz veya herhangi bir sezgiye kendini vermez veya aşkınsal olsa bile bir tümdengelimli çıkarıma tabi olmaz. Bunların hiçbirisi nesnenin veya nesnelliğin biçimine gönderme yapmaz. Bu kavramlar, kaydedilen biçimi aksiyom olan bir *karardan* kaynaklanır; varlık olarak varlığa dair düşünce için yeni bir dönemin açıldığına şahit olan bir karar. Bu noktada varlık, varlığın tutarsız gizilliğinin izini sürerek *bizim için* tutarlı bir şekilde meydana geldiği bir noktada kopmayı sadakatle hazırlayan şeyin yeniden şekillendirilmiş bir ontolojik durumda kaydolmasını azimle takip etmek dışında bizden başka bir şey talep etmez.

19.4 Sayının çağdaş “banalleştirilişi”ni düşüncenin dışında tutmak böyle mümkündür. Bu kitabın başında göstermelerini andığım sayının hükümdarlığı, Sayıya dair matematiksel düşünce için geçişsizdir. Sayısalılık ile değer veya hakikat arasında bir bağ olduğuna dair yanıltıcı bir fikri dayatır. Fakat bizatihi varlığın bir örneği olan Sayı hiçbir değeri destekleyemez; ve bizim için tarihsel sunumunu gerçekleştirdiği matematiksel düşüncede verilen dışında, Sayının başka bir hakikati yoktur.

Anketlerde veya oy kullanımında, devlet veya özel şirket muhasebesinde, para ekonomisi, özneleri tabi kılan değerlendirmelerde sayının saltanatı meşruluğunu, Sayı veya Sayıya dair düşünceden almıyorsa bunun nedeni durumun basit yasasından, yani Sermayenin yasasından kaynaklanıyor olmasıdır. Her yasa gibi bu yasanın kendisi de durumda sunulanın bir-olarak-sayılmasını garanti eder, tarihsel durumumuzun tutarlı bir şekilde olmasını sağlar, fakat hakikat iddiası taşıyamaz; ne Sayıya dair bir hakikat, ne de Sayının varlığın biçimi olarak tayin ettiğine yaslanacak bir hakikat.

Bizim durumumuzda, yani Sermaye durumunda sayının saltanatı, sayısallığın kendisinin düşünülmeyen köleliğinin saltanatıdır. Değeri tayin ettiği iddia edilen sayı daha ziyade bizzat sayıya dair her düşünce üzerinde bir yasaktır. Sayı, durumun kendi yasasını bir noktada topladığı o karanlık nokta gibi işler: aynı zamanda hem egemen hem de her türlü düşünceden, hatta herhangi bir hakikate yönelecek her türlü araştırmadan eksiltilmiş olması nedeniyle karanlık.

Bunun sonucunda her düşünce –buna Sayının hakikatini ortaya çıkarmak isteyen her düşünce de da-

hildir– günümüzde sayının saltanatıyla ilişkili olarak zorunlu olarak geri çekiliş içinde açığa çıkar. Mallar-mé'nin bugün hiç olmadığı kadar yerinde sloganını bu anlamda anlamak gerekir: *kısıtlı eylem*.

Sayı kavramı üzerine tüm bu tefekkür, Sayıyı varlığa iade ettiği için, sayının sancağı altında sunulduğu haliyle çağdaş yargıyı tersine döndürmeyi zorunlu hale getirir. Bu yargı karşısında sayıyı oluşturan *hiçbir şeyin* değerli olmadığını söylemek gerekir. Ya da durum içinde bir hakikat yolunu takip eden her şeyin sayısallığa kayıtsızlığıyla ayırt edileceğini. Bu kayıtsızlık bir kriter olabileceği için değil, zira hiçbir sayı içermeyen birçok proje hiçbir hakikate de sahip değildir. Fakat bu kayıtsızlık, zorunlu bir özneliktir.

Hakikatin iddia edilebileceği her düzende –bilim, sanat, siyaset ve aşta– sermaye bolluğunun tersi hakikatin enderliğidir.

19.5 Fakat hakikat ilke gereği içinde bulunduğumuz durumda, bu durumun sadece bir yasası olan sayının saltanatından eksiltilmişse bu hakikat sürecinin kökeni nedir?

Bir hakikat ne bizatihi varlığa (bu nedenle bir Sayıyla ayırt edilmez) ne de çağdaş duruma, yani Sermayenin durumuna (bu nedenle sayılarla ayırt edilmez) bağlı olamaz. Hakikatin kökeni olaysaldır. Fakat olay, her ne kadar durum-içindeki-varlığın imkânını aşsa da, varlık-olmayan değildir. Daha doğru bir tabir, olayın varlık-ötesi türünden olduğunu söylemek olacaktır: Aynı zamanda hem varlığın ilkesinde “muhafaza edilir” (her şey gibi bir olay da bir çokluktur) hem de bu

ilkeden kopar (olay durumun sayma yasasına girmez, öyle ki sayılmadığı için tutarlı bir varlık oluşturmaz). Olaysal varlık-ötesi hem çoktur hem de Bir'in "ötesinde"dir; veya benim tercih ettiğim tabirle Bir-ötesidir [ultra-Un]. Tamamen sayılara boyun eğmiş bir durumda bir hakikatin olabilmesi, sayılardan eksiltilmiş o Bir-ötesine sadakate bağlıdır.

Yapmaya çalışmış olduğumuz gibi Sayı üzerine düşünmek bizi ya ebediliğin tarihi olan matematiğe ya da *vuku bulanın* sadık ve kısıtlı bir tetkikine, Sermayeye ve dolayısıyla sayısallığın köleliğiyle daima heterojen olan bir hakikate kaynak olan sayı üstü bir rastlantıya kavuşturur. Söz konusu olan Sayıyı hem sayıların tiranlığından kurtarmak hem de bazı hakikatleri doğurmasını sağlamaktır. Her koşulda, kısıtlı eylem uzak bir düzensizliğin ilkesidir: Matematiksel olarak, sıra düzeninin Sayının varlığına dair bir düşüncenin aşırı insani güvencesizliği olduğunu ortaya koyar, fiilî ve teorik olarak durumumuzun düzen yasası olan sayıların çöküşünü gerçekleştirir:

"Bir tanrı gibi, ne birini ne ötekini bir düzene koydum..."¹

1 Alvaro de Campos, *Réticences* adlı şiirinin sonu (1929), Fransızca çev. A. Guibet.